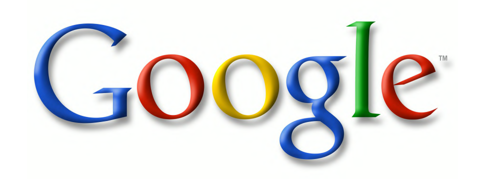
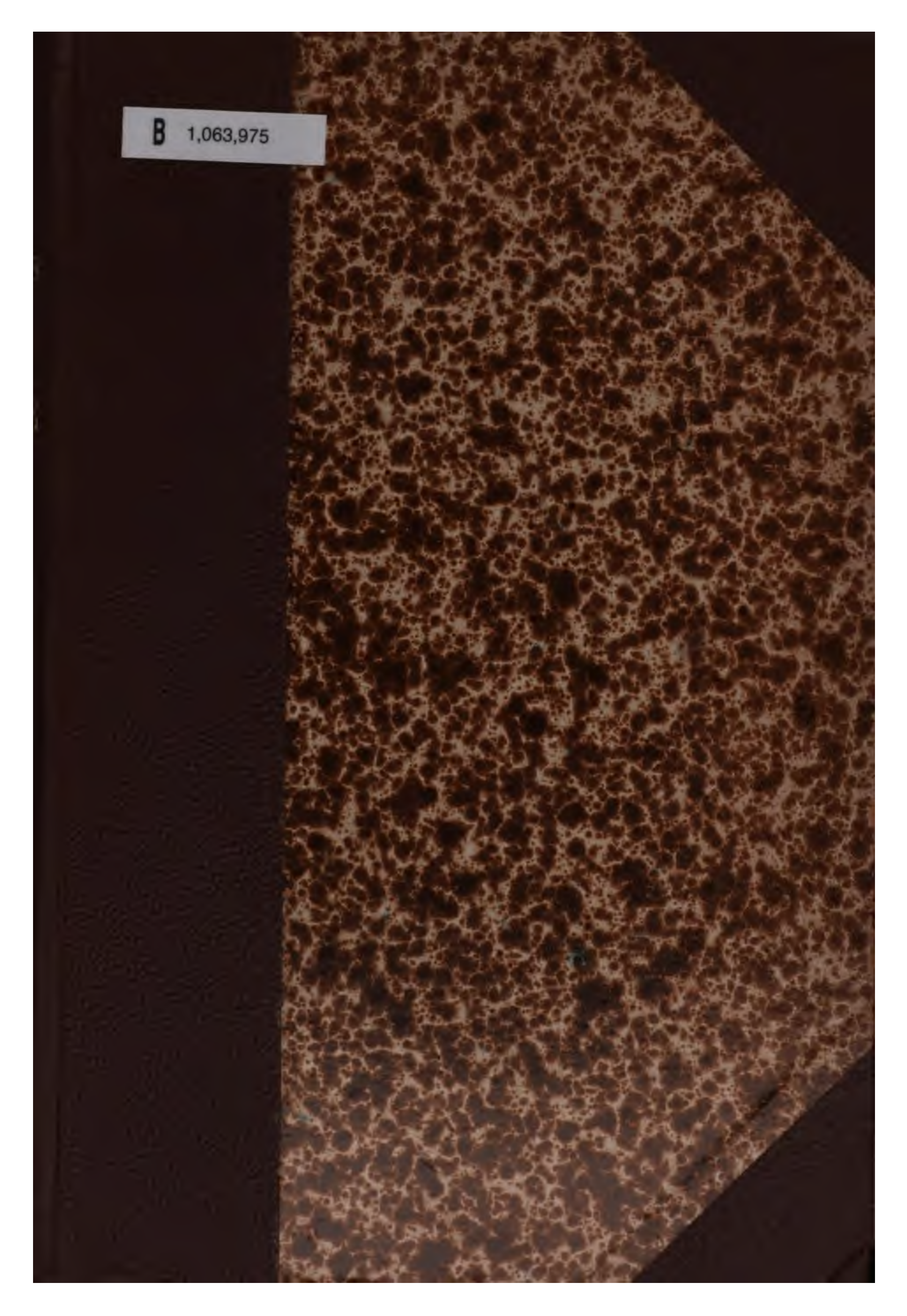




B 1,063,975







# SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

## DE BRUXELLES.

# ANNALES

DE LA

# SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

## DE BRUXELLES

*Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest.*

CONST. DE FID. CATH. C. IV.

DOUZIÈME ANNÉE, 1887-1888

BRUXELLES

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

Rue de Louvain, 108

1888

# TABLE DES MATIÈRES

## PREMIÈRE PARTIE

## DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

## AUTEURS.

## SECONDE PARTIE

—

# MÉMOIRES

Pages.



## AUTEURS.

## QUESTIONS AU CONCOURS.

---

1° *On demande des recherches nouvelles sur des combinaisons renfermant le noyau* $C_4 — C_5H_4$.

2° *Des foyers à gaz au point de vue hygiénique.*

3° *Donner une théorie rigoureuse de la différentiation sous le signe dans les intégrales définies, en assignant les conditions précises qui limitent l'application de la règle de Leibnitz, principalement dans le cas de limites infinies ou de fonctions passant par l'infini. Faire l'application de ces principes à quelques intégrales définies célèbres.*

Le 1er octobre 1889 est la date de rigueur pour l'envoi des mémoires au secrétariat.

---

# PREMIÈRE PARTIE

# DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

## STATUTS

Article 1er. — Il est constitué à Bruxelles une association qui prend le nom de Société scientifique de Bruxelles, avec la devise : « *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest* (1). »

Art. 2. — Cette association se propose de favoriser, conformément à l'esprit de sa devise, l'avancement et la diffusion des sciences.

Art. 3. — Elle publiera annuellement le compte rendu de ses réunions, les travaux présentés par ses membres, et des rapports sommaires sur les progrès accomplis dans chaque branche.

Elle tâchera de rendre possible la publication d'une revue destinée à la vulgarisation (2).

Art. 4. — Elle se compose d'un nombre illimité de membres, et fait appel à tous ceux qui reconnaissent l'importance d'une culture scientifique sérieuse pour le bien de la société.

---

(1) Const. de Fid. cath. C. IV.

(2) Depuis le mois de janvier 1877, cette revue paraît, par livraisons trimestrielles, sous le titre de *Revue des questions scientifiques*. Elle forme chaque année deux volumes in-8° de 700 pages. Prix de l'abonnement : 20 francs par an pour tous les pays de l'Union postale. Les membres de la Société scientifique ont droit à une réduction de 25 pour cent.

Art. 5. Elle est dirigée par un *Conseil* de vingt membres, élus annuellement dans son sein. Le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire et le Trésorier font partie de ce Conseil. Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles.

Art. 6. Pour être admis dans l'association, il faut être présenté par deux membres. La demande, signée par ceux-ci, est adressée au Président, qui la soumet au Conseil. L'admission n'est prononcée qu'à la majorité des deux tiers des voix.

L'exclusion d'un membre ne pourra être prononcée que pour des motifs graves et à la majorité des deux tiers des membres du Conseil.

Art. 7. Les membres qui souscrivent, à une époque quelconque, une ou plusieurs parts du capital social, sont *membres fondateurs*. Ces parts sont de 500 francs. Les *membres ordinaires* versent une cotisation annuelle de 15 francs, qui peut toujours être rachetée par une somme de 150 francs, versée une fois pour toutes.

Le Conseil peut nommer des *membres honoraires* parmi les savants étrangers à la Belgique.

Les noms des membres fondateurs figurent en tête des listes par ordre d'inscription, et ces membres reçoivent autant d'exemplaires des publications annuelles qu'ils ont souscrit de parts du capital social. Les membres ordinaires et les membres honoraires reçoivent un exemplaire de ces publications.

Tous les membres ont le même droit de vote dans les Assemblées générales.

Art. 8. Chaque année, il y a trois sessions. La principale se tiendra dans la quinzaine qui suit la fête de Pâques et pourra durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels, et l'on y nomme le Bureau et le Conseil pour l'année suivante.

Les deux autres sessions se tiendront en octobre et en janvier.

[illegible] siège princi- [illegible] Pâques.



Art. 9. — Lorsqu'une résolution, prise dans l'Assemblée générale, n'aura pas été délibérée en présence du tiers des membres de la Société, le Conseil aura la faculté d'ajourner la décision jusqu'à la prochaine session de Pâques. La décision sera alors définitive, quel que soit le nombre des membres présents.

Art. 10. — La Société ne permettra jamais qu'il se produise dans son sein aucune attaque, même courtoise, à la religion catholique, ou à la philosophie spiritualiste et religieuse.

Art. 11. — Dans les sessions, la Société se répartit en cinq sections : I. *Sciences mathématiques*, II. *Sciences physiques*, III. *Sciences naturelles*, IV. *Sciences médicales*, V. *Sciences économiques*.

Tout membre de l'association choisit chaque année la section à laquelle il désire appartenir. Il a le droit de prendre part aux travaux des autres sections avec voix consultative.

Art. 12. — La session comprend des séances générales et les séances de section.

Art. 13. — Le Conseil représente l'association. Il a tout pouvoir pour gérer et administrer les affaires sociales. Il place en rentes sur l'État ou en valeurs garanties par l'État les fonds qui constituent le capital social.

Il fait tous les règlements d'ordre intérieur que peut nécessiter l'exécution des statuts, sauf le droit de contrôle de l'Assemblée générale.

Il délibère, sauf les cas prévus à l'article 6, à la majorité des membres présents. Néanmoins, aucune résolution ne sera valable qu'autant qu'elle aura été délibérée en présence du tiers au moins des membres du Conseil dûment convoqué.

Art. 14. — Tous les actes, reçus et décharges sont signés par le Trésorier et un membre du Conseil, délégué à cet effet.

Art. 15. — Le Conseil dresse annuellement le budget des dépenses de l'association et présente dans la session de Pâques le

compte détaillé des recettes et dépenses de l'exercice écoulé. L'approbation de ces comptes, après examen de l'Assemblée, lui donne décharge.

Art. 16. — Les statuts ne pourront être modifiés que sur la proposition du Conseil, à la majorité des deux tiers des membres votants, et dans l'Assemblée générale de la session de Pâques.

Les modifications ne pourront être soumises au vote qu'après avoir été proposées dans une des sessions précédentes. Elles devront figurer à l'ordre du jour dans les convocations adressées à tous les membres de la Société.

Art. 17. — La devise et l'article 10 ne pourront jamais être modifiés.

En cas de dissolution, l'Assemblée générale, convoquée extraordinairement, statuera sur la destination des biens appartenant à l'association. Cette destination devra être conforme au but indiqué dans l'article 2.

---

# RÈGLEMENT

ARRÊTÉ PAR LE CONSEIL POUR L'ENCOURAGEMENT DES RECHERCHES SCIENTIFIQUES.

---

1. — Le Conseil de la Société scientifique de Bruxelles a résolu d'instituer des concours et d'accorder des subsides pour encourager les recherches scientifiques.

2. — A cet objet seront consacrés :

1° Le revenu du bénéfice acquis à la Société jusqu'à la session de Pâques 1879;

2° La moitié du bénéfice acquis pendant l'exercice qui précède l'exercice courant.

3. — Chaque année, l'une des sections désignera une question à mettre au concours. L'ordre dans lequel les sections feront cette désignation sera déterminé par le sort. Toute question, pour être posée, devra être approuvée par le Conseil, qui donnera aux questions la publicité convenable.

4. — Les questions auxquelles il n'aura pas été répondu d'une manière satisfaisante resteront au concours. Le Conseil pourra cependant inviter les sections compétentes à les remplacer par d'autres.

5. — Aucun prix ne pourra être inférieur à 500 francs. Une médaille sera en outre remise à l'auteur du mémoire couronné.

6. — Ces concours ne seront ouverts qu'aux membres de la Société.

7. Ne sont admis que les ouvrages et les planches manuscrits.

8. Le choix de la langue dans laquelle seront rédigés les mémoires est libre. Ils seront, s'il y a lieu, traduits aux frais de la Société; la publication n'aura lieu qu'en français.

9. Les auteurs ne mettront pas leur nom à ces mémoires, mais seulement une devise qu'ils répéteront dans un billet cacheté renfermant leur nom et leur adresse.

10. Les jurys des concours seront composés de trois membres présentés par la section compétente et nommés par le Conseil.

11. Les prix seront décernés par le Conseil sur le rapport des jurys.

12. Toute décision du Conseil ou des sections relative aux prix sera prise au scrutin secret et à la majorité absolue des suffrages.

13. La Société n'a l'obligation de publier aucun travail couronné. Les manuscrits de tous les travaux présentés au concours restent la propriété de la Société. En cas de publication, cent exemplaires seront remis gratuitement aux auteurs.

14. Les résultats des concours seront proclamés et les médailles remises dans l'une des assemblées générales de la session de [illegible]. Les rapports des jurys devront être remis au Conseil six semaines avant cette session. Le 1er octobre de l'année précédente est la date de rigueur pour l'envoi des mémoires au secrétariat.

15. Pour être admis à [illegible] [illegible], il faut être membre de la Société depuis un an au moins.

16. — Le membre qui demandera un subside devra faire connaître par écrit le but précis de ses travaux, au moins d'une manière générale; il sera tenu, dans les six mois de l'allocation du subside, de présenter au Conseil un rapport écrit sur les résultats de ses recherches, quel qu'en ait été le succès.

17. — Le Conseil, après avoir pris connaissance des diverses demandes de subsides, à l'effet d'en apprécier l'importance relative, statuera au scrutin secret.

18. — Les résultats des recherches favorisées par les subsides de la Société devront lui être présentés, pour être publiés dans ses *Annales* s'il y a lieu.

Note. – Le tirage au sort, ordonné par l'article 3, a rangé les sections dans l'ordre suivant : 2e, 4e, 3e, 5e et 1re.

# LETTRE

DE

# S. S. LE PAPE LÉON XIII

AU PRÉSIDENT ET AUX MEMBRES
DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES.

---

*Dilectis Filiis Praesidi ac Membris Societatis Scientificae Bruxellis constitutae.*

LEO PP. XIII.

DILECTI FILII, SALUTEM ET APOSTOLICAM BENEDICTIONEM.

Gratae Nobis advenerunt litterae vestrae una cum Annalibus et Quaestionibus a vobis editis, quas in obsequentissimum erga Nos et Apostolicam Sedem pietatis testimonium obtulistis. Libenter sane agnovimus Societatem vestram quae a scientiis sibi nomen fecit, et quae tribus tantum abhinc annis laetis auspiciis ac Iesu Christi Vicarii benedictione Bruxellis constituta est, magnum iam incrementum cepisse, et uberes fructus polliceri. Profecto cum infensissimi relligionis ac veritatis hostes nunquam desistant, imo magis magisque studeant dissidium rationem inter ac fidem propugnare, opportunum est ut praestantes scientia ac pietate viri ubique exurgant, qui Ecclesiae doctrinis ac documentis ex animo obsequentes, in id contendant, ut demonstrent *nullam unquam inter fidem et rationem veram dissensionem esse posse;* quemadmodum Sacrosancta Vaticana Synodus, constantem Ecclesiae et Sanctorum Patrum doctrinam affirmans, declaravit Constitutione IV^a de fide catholica. Quapropter gratulamur quod Societas vestra hunc primo finem sibi proposuerit, itemque in statutis legem dederit, ne quid a sociis contra sanam christianae philosophiae doctrinam committatur; simulque omnes hortamur ut

nunquam de egregio eiusmodi laudis tramite deflectant, atque ut toto animi nisu praestitutum Societatis finem praeclaris exemplis ac scriptis editis continuo assequi adnitantur. Deum autem Optimum Maximum precamur, ut vos omnes caelestibus praesidiis confirmet ac muniat: quorum auspicem et Nostrae in vos benevolentiae pignus, Apostolicam benedictionem vobis, dilecti filii, et Societati vestrae ex animo impertimur.

Datum Romae apud S. Petrum die 15. Ianuarii 1879. Pontificatus Nostri Anno Primo.

Leo P. P. XIII.

---

*A nos chers fils le Président et les Membres de la Société scientifique de Bruxelles.*

## LÉON XIII, PAPE.

Chers fils, salut et bénédiction apostolique.

Votre lettre Nous a été agréable, ainsi que les Annales et les Questions publiées par vous et offertes en témoignage de votre piété respectueuse envers Nous et le Siège apostolique. Nous avons vu réellement avec plaisir que votre Société, qui a adopté le nom de Société scientifique, et s'est constituée à Bruxelles, depuis trois ans seulement, sous d'heureux auspices avec la bénédiction du Vicaire de Jésus-Christ, a déjà pris un grand développement et promet des fruits abondants. Certes, puisque les ennemis acharnés de la religion et de la vérité ne se lassent point et s'obstinent même de plus en plus à proclamer l'opposition entre la raison et la foi, il est opportun que partout surgissent des hommes distingués par la science et la piété, qui, attachés de cœur aux doctrines et aux enseignements de l'Église, s'appliquent à démontrer *qu'il ne peut jamais exister de désaccord réel entre la foi et la raison,* comme l'a déclaré, dans la Constitution IV *de fide catholica,* le saint concile du Vatican affirmant la doctrine constante de l'Église et des saints Pères. C'est pourquoi Nous félicitons votre Société de ce qu'elle s'est d'abord proposé cette fin, et aussi de ce qu'elle a mis dans les Statuts un article défendant

à ses membres toute attaque aux saines doctrines de la philosophie chrétienne; et en même temps Nous les exhortons tous à ne jamais s'écarter de la voie excellente qui leur vaut un tel éloge, et à poursuivre continuellement de tout l'effort de leur esprit l'objet assigné à la Société, par d'éclatants exemples et par leurs publications. Nous prions Dieu très bon et très grand, qu'il vous soutienne tous et vous fortifie du céleste secours : en présage duquel, et comme gage de Notre bienveillance envers vous, Nous accordons du fond du cœur à vous, chers fils, et à votre Société la bénédiction apostolique.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 15 janvier 1879, l'an 1 de notre Pontificat.

Léon XIII, Pape.

---

# LISTES

DES

## MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

---

### Liste des membres fondateurs.

| | |
|---|---|
| S. E. le cardinal DECHAMPS (¹), archevêque de. | Malines. |
| François DE CANNART D'HAMALE (¹) | Malines. |
| Charles DESSAIN | Malines. |
| Jules VAN HAVRE (¹) | Anvers. |
| Le chanoine MAES (¹) | Bruges. |
| L'abbé A. DE LEYN | Bruges. |
| LEIRENS-ELIAERT | Alost. |
| Joseph SAEY | Bruxelles. |
| Frank GILLIS (¹) | Bruxelles. |
| Le Chᵉʳ DE SCHOUTHEETE DE TERVARENT | Saint-Nicolas. |
| Le Collège SAINT-MICHEL | Bruxelles. |
| Le Collège NOTRE-DAME DE LA PAIX | Namur. |
| Le duc D'URSEL, sénateur (¹) | Bruxelles. |
| Le Pᶜᵉ Gustave DE CROY | Le Rœulx. |
| Le Cᵗᵉ DE T'SERCLAES (¹) | Gand. |
| Auguste DUMONT DE CHASSART (¹) | Mellet (Hainaut). |
| Charles HERMITE, membre de l'Institut | Paris. |
| L'École libre de l'IMMACULÉE CONCEPTION | Vaugirard-Paris. |
| L'École libre SAINTE-GENEVIÈVE | Paris. |
| Le Collège SAINT-SERVAIS | Liège. |
| Le Cᵗᵉ DE BERGEYCK | Beveren-Waes. |

---

(¹) Décédé.

L'Institut Saint-Ignace . . . . . . . . . . Anvers.
Philippe Gilbert . . . . . . . . . . . Louvain.
Le R. P. Provincial de la Compagnie de Jésus en Belgique . . . . . . . . . . . . . . Bruxelles.
Le Collège d'Alost . . . . . . . . . . . Alost.
Le chanoine de Wouters . . . . . . . . . Braine-le-Comte.
Antoine d'Abbadie, membre de l'Institut . . . Paris.
S. E. le cardinal Haynald, archevêque de Kalocsa et Bàcs . . . . . . . . . . . . . . Kalocsa (Hongrie).
S. E. le cardinal Vannutelli . . . . . . . . Rome.
S. G. Mgr Du Roussaux, évêque de . . . . . Tournay.
S. E. le cardinal Goossens, archevêque de . . . Malines.
R. Bedel . . . . . . . . . . . . . . . Aix.
S. G. Mgr Belin, évêque de. . . . . . . . . Namur.
Eugène Pecher. . . . . . . . . . . . . . Bruxelles.
S. Exc. Mgr Ferrata, nonce apostolique . . . . Bruxelles.

---

## Liste des membres honoraires.

Le P^ce B. Boncompagni, de l'Académie pontificale des Nuovi Lincei . . . . . . . . . . . Rome.
Antoine d'Abbadie, membre de l'Institut . . . Paris.
Charles Hermite, membre de l'Institut . . . . Paris.
Le général Newton . . . . . . . . . . . New-York.
Le docteur Foerster . . . . . . . . . . . Aix-la-Chapelle.
Le R. P. Perry, S. J., de la Société royale de Londres . . . . . . . . . . . . . . Stonyhurst.
A. de Lapparent . . . . . . . . . . . . Paris.
A. Béchamp . . . . . . . . . . . . . . Lille.
Camille Jordan, membre de l'Institut . . . . Paris.
Wolf, membre de l'Institut . . . . . . . . Paris.
Haton de la Goupillière, membre de l'Institut . Paris.
Le vice-amiral de Jonquières, membre de l'Institut. Paris.
Boussinesq, membre de l'Institut . . . . . . Paris.
L. de Bussy, membre de l'Institut . . . . . . Paris.

## Liste générale des membres de la Société scientifique de Bruxelles.

---

d'Abbadie (Antoine), membre de l'Institut, 120, rue du Bac. — Paris; ou Abbadia par Hendaye (Basses-Pyrénées — France).

Abbeloos (Mgr), docteur en théologie, recteur magnifique de l'Université. — Louvain.

d'Acy (E.), 40, boulevard Malesherbes. — Paris.

Adan de Yarza (Ramon), ingénieur des mines. — Lequeitio (Vizcaya — Espagne).

Alcolado, S. J. (R. P. Miguel), professeur d'analyse, Colegio de Estudios superiores. — Deusto (Bilbao — Espagne).

Alexis, M. G. (Frère), 27, rue Oudinot. — Paris.

Alfageme (José), catedrático de Fisica y Quimica en el Instituto. — Santiago (Espagne).

Allard (François), industriel. — Châtelineau.

Almain-de Hase, architecte, 157, rue de la Loi. — Bruxelles.

Almera (abbé Jaime), profesor de Geologia en el Seminario de Barcelona (Espagne).

André (J.-B.), ingénieur, 201, avenue Longchamp. — Uccle.

Arcelin (Adrien), secrétaire perpétuel de l'Académie de Mâcon. — Châlon-sur-Saône (Saône-et-Loire — France).

Arduin (abbé Alexis), à Aiguebelle, par Grignan (Drôme — France).

Augier, docteur en médecine, professeur aux Facultés catholiques, 48, rue Henri Kolb. — Lille (Nord — France).

d'Auxy de Launois (C^te^ Alb.). — Jurbise.

Baguet (Charles), avocat, receveur de l'Université, 6, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Baillon, 10-11, place de la Calandre. — Gand.

Balaguer, S. J. (R. P. Vicente), rector del Seminario Conciliar. — Huesca (Aragon — Espagne).

Bapst (Germain), 215, faubourg Saint-Honoré. — Paris.

Barcia Caballero (Juan), Ayudante de Clases prácticas de Anatomia de la Universidad, Puerta de la Peña, 10. — Santiago (Espagne).

Bardin (abbé Louis), professeur de géologie à la Faculté, 19, rue de la Préfecture. — Angers (Maine-et-Loire — France).

Baule (Albert), lieutenant de vaisseau, 135, chemin de Magudas. — Caudéran, près Bordeaux (Gironde — France)
Bayet (Adrien), 30, nouveau marché aux Grains. — Bruxelles
Bayet (Ernest), 68, rue Joseph II. — Bruxelles.
Beaucourt (abbé Léopold), curé des Écaussinnes d'Enghien.
de Beauffort (Cte Henri), 125, rue de Grenelle. — Paris; ou château de Borsuyt, par Avelghem (Flandre-Occidentale).
Béchamp, doyen de la Faculté catholique de médecine, 36, rue des Fossés. — Lille (Nord — France).
Bedel (abbé R.), prêtre de St-Sulpice, directeur au Grand-Séminaire d'Aix (Bouches-du-Rhône — France).
Belin (S. G. Mgr), évêque de Namur.
Bellemans (Charles), comptable, 46, courte rue d'Argile. — Anvers.
Belpaire (Théodore), directeur du service provincial, 18, rue des Sœurs-Noires. — Gand.
de Benazé, S. J. (R. P.), 18, rue Lhomond. — Paris.
de Bergeyck (Cte), château de Beveren-Waes (Flandre-Orientale).
Berleur (Adolphe), ingénieur, 17, faubourg Saint-Laurent. — Liège.
Berlingin (Melchior), directeur de l'usine de la Vieille-Montagne. — Penchot (Aveyron — France).
Bernardin (Monsieur), conservateur du Musée commercial-industriel, au Pensionnat. — Melle (Flandre-Orientale).
Bertrand (Léon), 9, rue Crespel. — Bruxelles.
Béthune-Eliaert (Bon), sénateur, rue du Pont. — Alost.
Béthune (Mgr Félix), rue d'Argent. — Bruges.
Bichot (Abbé), professeur au Petit-Séminaire, 19, rue N.-D. des Champs. — Paris.
Blariaux (Jean), ingénieur civil et des mines. — Fumay (Ardennes — France).
Blas (Ch.), professeur à l'Université, de l'Académie royale de médecine. — Louvain.
Blondel (Alfred), ingénieur, 14, rue de la Magdeleine. — Tournay.
Blondiaux (Auguste), à Morialmé (Namur).
Blot (abbé), 23, avenue de Messine. — Paris.
de la Boëssière-Thiennes (Mis), 23, rue aux Laines. — Bruxelles; ou château de Lombise par Lens (Hainaut).
Bonamis (Florimond), ingénieur. — Jambes (Namur).
Boncompagni (Pce B.), de l'Académie pontificale des Nuovi Lincei, palazzo Piombino, piazza Colonna. — Rome.

Bonnevie (Auguste), ingénieur, 62, rue des Marécages. — Bruges.
Bonnevie (Victor), avocat, 7, rue du Congrès. — Bruxelles.
Borginon (Gustave), docteur en médecine, 58, rue Dupont. — Bruxelles.
de Borman (Chev Ernest), 51, rue de la Commune. — Saint-Josse-ten-Noode (Bruxelles).
Bossu (abbé L.), professeur à l'Université, rue de Bériot. — Louvain.
Boulay (abbé), professeur aux Facultés catholiques, 127, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).
Bourdeau (Abel), médecin de bataillon de 1re classe, École des Pupilles de l'Armée. — Alost.
Bourgeat (abbé), professeur aux Facultés catholiques, 15, rue Charles de Muyssart. — Lille (Nord — France).
de Bousies (Cte Adhémar), rue d'Havré. — Mons.
Boussinesq, membre de l'Institut, 1, rue Claude-Bernard. — Paris.
du Boys (Paul), ingénieur en chef des ponts et chaussées. — Aurillac (Cantal — France).
Branly (Édouard), professeur à l'Institut catholique, 42, avenue de Breteuil. — Paris.
Brassine (J.-J.), général commandant la 2e division d'infanterie. — Anvers.
Braun, S. J. (R. P.), au Collège. — Mariaschein (Bohême).
Breithof (N.), professeur à l'Université, rue de Bruxelles. — Louvain.
Bribosia, docteur en médecine, membre de l'Académie royale de médecine, 16, rue Neuve. — Namur.
Brifaut (Armand), avocat, 14, rue Crespel. — Bruxelles.
Brockman (Guillermo), hijo. — Pachuca (Estado de Hidalgo — Mexique).
Bruylants, professeur à l'Université catholique, de l'Académie royale de médecine, rue de Malines. — Louvain.
Buisseret (Anatole), professeur au Collège communal, 13, chaussée de Hal. — Nivelles.
Buisseret (Joseph), professeur au Collège communal, 13, chaussée de Hal. — Nivelles.
de Bussy (L.), membre de l'Institut, inspecteur général des constructions navales, 7, rue de Jouy. — Paris.
Cambier (Vital), industriel. — Morlanwelz (Hainaut).
Cappellen (Guillaume), avocat, 4, place Marguerite. — Louvain.
Carnoy (Joseph), professeur à l'Université, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

CARTUYVELS (Mgr), vice-recteur de l'Université. — Louvain.

CARTUYVELS (Jules), directeur au Ministère de l'agriculture, 40, rue Breydel. — Bruxelles.

CASARÈS (Antonio), catedrático de Quimica y rector de la Universidad. — Santiago (Galice — Espagne).

CASARÈS (Demetrio), farmaceutico. — Santiago (Galice — Espagne).

CASARÈS (Firmino), en la Coruña (Espagne).

CHARLIER (Ernest), docteur en médecine, 4, rue de la Cuiller. — Bruxelles.

DU CHASTEL (Cte Henri), 55, rue de Trèves. — Bruxelles.

CHAUTARD, doyen de la Faculté catholique des sciences, 3, rue Saint-Martin. — Lille (Nord — France).

CHÉDAILLE (abbé C.-A.), chanoine honoraire, supérieur de l'Institution Saint-Charles. — Chauny (Aisne — France).

CHONÉ, S. J. (R. P.), 18, rue Lhomond. — Paris.

CLAES (Paul), 79, boulevard de Tirlemont. — Louvain.

CLASEN (abbé B.-I.), curé doyen d'Echternach (Grand-Duché de Luxembourg).

COGELS (J.-B.-Henri), 58, longue rue de l'Hôpital. — Anvers.

COLLÈGE D'ALOST, 13, rue de Bruxelles. — Alost.

COLLÈGE NOTRE-DAME DE LA PAIX. — Namur.

COLLÈGE SAINT-MICHEL. — Bruxelles.

COLLÈGE SAINT-SERVAIS. — Liège.

COOLS (Auguste), ingénieur. — Lierre.

COPPIETERS DE STOCKHOVE (abbé Ch.), vicaire à Sainte-Walburge. — Bruges.

DE CORSWAREM (Cher Adrien), avocat. — Hasselt.

COUSIN (L.), professeur à l'Université, 10, boulevard de Tirlemont. — Louvain.

COUSOT (Georges), docteur en médecine. – Dinant.

CRANINCX (Oscar), 41, rue de la Loi. — Bruxelles.

CRANINCX (P.-J.-E)., professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine. — Louvain.

DE CROY (Pce Gustave). — Le Rœulx.

DE CROY (Pce Juste), 53, rue de la Loi. — Bruxelles; ou Le Rœulx.

CUYLITS (Jean), docteur en médecine, 44, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.

DANSAERT (Antony), 17, rue du Champ-de-Mars. — Bruxelles.

DASSONVILLE-LEPÉE, (A.), rue de Bruges. — Menin.

DAVIGNON (Julien), 35, avenue de la Toison-d'Or. — Bruxelles.
DE BAETS (Herman), 16, rue du Bélier. — Gand.
DEBAISIEUX, professeur à l'Université. — Louvain.
DE BLAUWE (Jean), juge de paix, Grand'Place. — Courtrai.
DE BLOO (Julien), ingénieur, 89, boulevard Frère-Orban. — Gand.
DE BROUWER (abbé), supérieur du Petit-Séminaire. — Roulers.
DE BRUYN (Jules), 171, chaussée de Wavre. — Bruxelles.
DE BRUYN (Tony), juge au tribunal de 1re instance, 96, rue du Trône. — Bruxelles.
DE DECKER (Eugène), membre de la Chambre des Représentants, 34, rue de Vénus. — Anvers.
DE JAER (Camille), avocat, 56, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.
DE JAER (Jules), ingénieur des mines, Vieux-Marché-aux-Bêtes. — Mons.
DE LANTSHEERE (Léon), avocat, 210, rue du Trône. — Bruxelles.
DELATTRE, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.
DELCOUR (Ch.), professeur émérite à l'Université, ministre d'État, rue Marie-Thérèse. — Louvain.
DELEBECQUE-VERGAUWEN, 12, rue aux Draps. — Gand.
DE LEYN (abbé A.), principal du Collège Saint-Louis. — Bruges.
DE LORGE (abbé J.), professeur au Séminaire. — Roulers.
DELSAULX, S. J. (R. P.), docteur en sciences physiques et mathématiques, 11, rue des Récollets. — Louvain.
DELVIGNE (chan. Adolphe), curé de Saint-Josse-ten-Noode, 14, rue de la Pacification. — Bruxelles.
DEMANET (abbé), professeur au Collège de Bellevue. — Dinant.
DE MARBAIX, professeur à l'Université de Louvain. — Eynthout par Westerloo (Anvers).
DE MEESTER (Augustin), propriétaire. — Saint-Nicolas.
DEPEYRE (Octave), ancien ministre, 97, rue du Bac. — Paris.
DE PRETER (Herman), ingénieur, 28, boulevard du Jardin Botanique — Bruxelles.
DE PRINS, place du Peuple. — Louvain.
DE RIDDER (Paul), 68, chaussée de Haecht. — Bruxelles.
DESCAMPS (abbé A. J.), inspecteur des Écoles du canton de Mons, curé d'Harmignies (Hainaut).
DESCAMPS (É.), professeur à l'Université. — Louvain.
DESPLATS (docteur), professeur aux Facultés catholiques, 52, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).
DESSAIN (Charles), libraire-éditeur, rue de la Blanchisserie. — Malines.

DETIERRE (abbé), aumônier de l'École vétérinaire, Institut Saint-Louis, 121, rue du Marais. — Bruxelles.

DE TILLY (J.), colonel d'artillerie, directeur de l'Arsenal de construction, de l'Académie royale de Belgique. — Anvers.

DEVIVIER (A.), professeur à l'Université, rue de Namur. — Louvain.

DEWALQUE (François), professeur à l'Université, 26, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

DEWALQUE (Gustave), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 17, rue de la Paix. — Liège.

DIERCKX (P.), membre de la Chambre des Représentants. — Turnhout.

DINCQ-JORDAN, ingénieur et industriel, Pont-Canal, Jemappes (par Mons-Station).

DOHET (Ferdinand), avocat, membre de la Chambre des Représentants, place S$^t$-Aubin. — Namur.

DOLLO (Louis), aide-naturaliste au Musée d'histoire naturelle de Belgique, 69, rue du Cornet. — Etterbeek (Bruxelles).

DE DORLODOT (Sylvain), château de Floriffoux, par Floreffe (Namur).

DE DORLODOT (H.), docteur en théologie, professeur au Grand-Séminaire. — Namur.

DUCROST (abbé), curé de Solutré (Saône-et-Loire — France).

DUGNIOLLE (Max), professeur à l'Université, 57, Coupure. — Gand.

DUMONT (A.), docteur en méd., 18, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

DUMONT (André), ingénieur, 51, longue rue d'Argile. — Anvers.

DUMONT (Madame), Mont-Saint-Martin. — Liège.

DUMONT, S. J. (R. P.), 10, Parkstreet. — Calcutta (Bengale).

DURANT (Henri), inspecteur-général des charbonnages patronnés par la Société générale, 3, Montagne du Parc. — Bruxelles.

DU ROUSSAUX (S. G. Mgr), évêque de Tournay.

DUSAUSOY (Clément), professeur à l'Athénée royal, 117, chaussée de Courtrai. — Gand.

DUTORDOIR (Hector), sous-ingénieur provincial, 311, boulevard du Château. — Gand.

ÉCOLE LIBRE SAINTE-GENEVIÈVE, rue Lhomond. — Paris.

ÉCOLE LIBRE DE L'IMMACULÉE-CONCEPTION. — Vaugirard, Paris.

DE L'ESCAILLE (Joseph), ingénieur. — Hamont, par Neerpelt (Limbourg).

D'ESCLAIBES, S. J. (R. P.), doyen de la faculté des sciences, internat des Facultés catholiques. — Angers) Maine-et-Loire — France).

EYNAUD, ingénieur de la marine, sous-directeur des constructions navales, 2, place de l'Alma. — Cherbourg (Manche — France).

Faucon (A.), docteur en médecine. — Le Rœulx.
Fauvel (Albert A.), 15, avenue de Breteuil. — Paris.
Feijeiro (Maximino), catedrático de Patologia y Clinica en la Universidad. — Santiago (Espagne).
Félicien (Monsieur), supérieur-général des Joséphites. — Grammont.
Feliù y Perez (Bartolomé), profesor en la Universidad, calle del Bruch, 31. — Barcelona (Espagne).
Fernandez Sanchez (José), catedrático de Historia universal, en la Universidad. — Santiago (Galice — Espagne).
Ferrand de Missol (Amédée), 40, boulevard Montparnasse. — Paris.
S. Exc. Mgr Ferrata, archevêque de Thessalonique, nonce du S. Siège en Belgique.
Finlay (Carlos), medico. — Habana (Cuba).
Fita y Colomé S. J. (R. P. Fidel), calle del Lobo, 34, pral. – Madrid (Espagne).
Flahault (Charles), docteur ès sciences naturelles, chargé de cours à la Faculté des sciences. — Montpellier (Hérault — France).
Floren (Gustave), 15, Sydney street. — Londres.
Focillon (Ad.), professeur en retraite de l'Université de France, 15, rue Vauquelin. — Paris.
Foerster (Dr), professeur d'histoire naturelle. — Aix-la-Chapelle.
Fontaine (Théodore), professeur à l'Université, 14, rue des Orphelins. — Louvain.
Forni (Cte Paul). — Bozen (Tyrol — Autriche).
de Foville (abbé), professeur à l'Université. — Montréal (Canada).
Franc (Anatole), Villa Franc. — Saint-Raphaël (Var); ou 16, rue de Montgolfier. — Lyon (Rhône — France).
François, S. J. (R. P. Alexis), professeur au Collège de la Paix, rue de Bruxelles. — Namur.
Francotte (Xavier), docteur en méd., 15, quai de l'Industrie. — Liège.
Gallez (Louis), docteur en médecine, membre de l'Académie royale de médecine. — Châtelet.
de Garcia de la Vega (Bon Victor), docteur en droit, 37, rue du Luxembourg. — Bruxelles.
Gauthier-Villars, 55, quai des Augustins. — Paris.
Gautier (chanoine), 79, rue Notre-Dame. — Malines.
Gelin (abbé), professeur au collège Saint-Quirin. — Huy.
George, S. J. (R. P. Charles), 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.
Gérard (Alphonse), ingénieur aux minières de Lamadelaine (Grand-Duché de Luxembourg).

de Gerlache (Paul), gouverneur de la province de Luxembourg. — Arlon.

Gerste, S. J. (R. P.), sacristia de las Capuchinas, 5. — Puebla (Mexique).

Gilbert (Jules), industriel. — Givet (Ardennes — France).

Gilbert (Ph.), professeur à l'Université, de l'Académie pontificale des Nuovi Lincei, 20, rue Notre-Dame. — Louvain.

Gillet (Camille), ingénieur, professeur à l'Institut agronomique et vétérinaire de Santa Catalina. — Buenos-Ayres (République Argentine).

Goedseels (Édouard), lieutenant, répétiteur à l'École militaire, 48, avenue de l'Hippodrome. — Ixelles.

Goemans (Jean), commissaire-voyer. — Westmeerbeek, par Westerloo (Anvers).

Goethals (Ernest), 235, avenue du Commerce. — Anvers.

Goix (Alph.), docteur en médecine, 40, rue de Joinville. — Paris.

Goossens (S. E. le cardinal), archevêque de Malines.

de Gordon (Dr Antonio), catedrático de Fisiologia en la Universidad. — Habana (Cuba).

Goris (Charles), docteur en médecine, 143, rue Royale. — Bruxelles.

Grand'Eury (Cyrille), ingénieur, correspondant de l'Académie des sciences, rue de Paris. — Saint-Étienne (Loire — France).

Grandmont (Alphonse), avocat. — Taormina (Sicile).

Granero, S. J. (R. P. Juan), colegio de N. Sra del Recuerdo, Chamartin de la Rosa. — Madrid (Espagne).

Gravez (Adrien), président du Comité houiller du Centre. — La Louvière (Hainaut).

Greindl (Bon Gustave), 20, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

Grenier (Gustave), propriétaire, 78, rue de la Station. — Louvain.

Grinda (Jesus), ingénieur des ponts et chaussées, Valverde, 22, 2°. — Madrid (Espagne).

Grisar (Armand), 5, rue Hoboken. — Anvers.

de Grossouvre (A.), ingénieur des mines. — Bourges (Cher — France).

de Grunne (Cte François), capitaine d'artillerie, 67, rue Belliard. — Bruxelles.

Guyétand, professeur de physique, École libre de Mont-Roland. — Dôle (Jura — France).

Haan, docteur en médecine, professeur à l'Université, 133, rue de Tirlemont. — Louvain.

HAHN, S. J. (R. P.), Collège Saint-Stanislas, 29, rue des Dominicains. — Mons.

HALLEUX (Émile), rue du Vieux-Bourg. — Bruges.

HAMARD (abbé), 12, rue des Dames. — Rennes (Ille-et-Vilaine — France).

HANQUET (Ferdinand), 16, rue du Laveu. — Liége.

DE HARLEZ (Mgr), professeur à l'Université, 8, rue au Vent. — Louvain.

HATON DE LA GOUPILLIÈRE (J. N.), membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur de l'École des mines, 60, boulevard Saint-Michel. — Paris.

DE HAULLEVILLE (B^on^), 97, rue Belliard. — Bruxelles.

DE LA HAYE (Auguste), capitaine en 1er au 11e régiment de ligne, Kessel-Loo. — Louvain.

HAYNALD (S. E. le cardinal), archevêque de Kalocsa et Bàcs (Hongrie).

HAYOIT, docteur en méd., membre de l'Académie royale de médecine, professeur à l'Université, 66, rue de Namur. — Louvain.

DE HEMPTINNE (Cte Joseph), fils, 31, rue Charles-Quint. — Gand; ou Tamise (Flandre Orientale).

D'HEMRICOURT DE GRUNNE (Cte), sénateur, 10, rue Montoyer. — Bruxelles; ou château d'Hamal, par Tongres.

HENRY (Hector). — Dinant.

HENRY (Louis), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 2, rue du Manège. — Louvain.

HERMITE (Charles), membre de l'Institut, 2, rue de Sorbonne. — Paris.

HERVIER (abbé Joseph), 31, grande rue de la Bourse. — Saint-Étienne (Loire — France).

HEUDE, S. J. (R. P.) — Zi-ka-wey (Chine).

HEYMANS (J.-F.), docteur en sciences, assistant à l'Institut physiologique, Dorotheenstrasse. — Berlin (Allemagne).

HOUTART (Jules). — Monceau-sur-Sambre (Hainaut).

HOUZE (Octave), docteur en médecine. — Binche.

HUBERT (Eugène), docteur en médecine, professeur à l'Université, 13, rue Léopold. — Louvain.

D'HULST (Mgr), recteur des Facultés catholiques, 74, rue de Vaugirard. — Paris.

ICAZBALCETA (Joaquín García), Apartado del Correo. 366. — Mexico (Mexique).

IMPERIALI (Mis) des Pces de Francavilla, 10, rue Montoyer. — Bruxelles; ou château d'Hamal par Tongres.

Iñiguez é Iñiguez (Francisco), catedratico de Astronomia en la Universidad, calle de Jardines, 18. — Madrid (Espagne).

Institut Saint-Ignace. — Anvers.

Jacmart, lieutenant-général, membre de la Chambre des Représentants, 21, rue Geefs. — Schaerbeek.

Jacobs (Mgr), curé-doyen de Sainte-Gudule. — Bruxelles.

Jannet (Claudio), professeur aux Facultés catholiques, 74, rue de Vaugirard. — Paris.

Janssens, docteur en médecine. — Puers (Anvers).

Jean (abbé), supérieur de l'Institution. — Saintes (Charente-Inférieure — France).

Jenner (Ch. I.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, directeur des travaux hydrauliques de la Marine, 38, rue de la Rampe. — Brest (Finistère — France).

Jimeno (Joaquin), ingeniero de caminos. — Castellon de la Plana (Espagne).

Jolly (Bon) lieutenant-général, commandant la 1re circonscription militaire. — Anvers.

Joly (Léon), avocat, 18, rue Caroly. — Bruxelles.

de Jonquières, vice-amiral, membre de l'Institut, 2, avenue Bugeaud. — Paris.

Jordan (Camille), membre de l'Institut, 48, rue de Varenne. — Paris.

Joubert, S. J. (R. P.), 18, rue Lhomond. — Paris.

Jourdain (Louis), ingénieur, 19, rue Léopold. — Bruxelles.

Kennis (Guillaume), ingénieur, 12, rue de Robiano. — Schaerbeek.

de Kerckhove (Vte Eugène), ancien membre de la Chambre des Représentants. — Malines.

Kerviler (René), ingénieur des ponts et chaussées. — Saint-Nazaire (Loire-Inférieure — France).

Kirsch (R. P. Alexandre M.) C. S. C. — Notre-Dame (Indiana, États-Unis).

de Kirwan (Charles), ancien inspecteur des forêts, 7, rue de l'Orangerie. — Versailles (Seine-et-Oise — France).

Klein, S. J. (R. P. Léopold Martial), Catholic University College. — Dublin (Irlande).

Kurth (Godefroid), professeur à l'Université, 62, rue Lairesse. — Liège.

Lacompte (Camille), docteur en médecine. — Tamise.

Lacor (E.), professeur de mathématiques à l'École Sainte-Geneviève, 133, boulevard Raspail. — Paris.

LAFONT, S. J. (R. P.), directeur de l'Observatoire héliospectroscopique, 10, Parkstreet. — Calcutta.

LAGASSE (Alexandre), pharmacien, 4, rue Saint-Maurice. — Nivelles.

LAGASSE (Charles), ingénieur en chef directeur des ponts et chaussées, 61, rue du Conseil. — Bruxelles.

LAGASSE (Jules), notaire, 112, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

LAMARCHE (Émile), 81, rue Louvrex. — Liége.

LAMBERT (Camille), ingénieur, 29, rue Fabry. — Liége.

LAMBIOTTE (Victor), ingénieur. — Oignies-Aiseau, par Tamines (Namur).

LAMEY (R. P. Dom Mayeul), O. S. B., prieuré de Saint-Jean, Grignon par Les Laumes (Côte-d'Or — France).

LAMY (Mgr), président du collége Marie-Thérèse. — Louvain.

DE LAPPARENT (A.), membre correspondant de la Société géologique de Londres, professeur à l'Institut catholique, 3, rue de Tilsitt. — Paris.

LATINIS (Victor), ingénieur, chef de service des forges et aciéries de la Société du Nord et de l'Est. — Trith-Saint-Léger (Nord — France).

LAVAUD DE LESTRADE, prêtre de Saint-Sulpice, professeur de sciences au Séminaire. — Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme — France).

LEBON, docteur en médecine, place Saint-Paul. — Nivelles.

LEDRESSEUR (Charles), docteur en médecine, professeur à l'Université, 75, voer des Capucins. — Louvain.

LEFEBVRE, docteur en médecine, professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine, 36, rue de Bériot. — Louvain.

LEFEBVRE (abbé Bruno), curé d'Upigny, par Leuze (Namur).

LEFEBVRE (abbé Ferdinand), professeur à l'Université, 36, rue de Bériot. — Louvain.

LEFEBVRE (Paul), avocat, 7, rue du Pepin. — Bruxelles.

LEGOUIS, S. J. (R. P.), docteur ès-sciences, 98, rue de Vaugirard. — Paris.

LEGRAND-BENOIT, 31, rue de Bruxelles. — Namur.

LE GRELLE (Cte Ferdinand), 21, rue Van Brée. — Anvers.

LEIRENS-ÉLIAERT, rue du Pont. — Alost.

LEJEUNE-SIMONIS, château de Sohan par Pepinster (Liége).

LEMOINE (Georges), ingénieur en chef des ponts et chaussées, examinateur de sortie pour la chimie à l'École polytechnique, 76, rue d'Assas. — Paris.

LEMONNIER (abbé Th.), professeur au Petit-Séminaire de Mont-aux-Malades, par Rouen (Seine-Inférieure — France).

LE PAIGE (C.), professeur à l'Université, 21, rue des Anges. — Liège.

DE LICHTERVELDE (C^te Gontran), conseiller de légation, château d'Écaussinnes. — Écaussinnes (Hainaut).

DE LIEDEKERKE (C^te Charles), 24, rue de l'Industrie. — Bruxelles.

DE LIEDEKERKE DE PAILHE (C^te Édouard), 47, avenue des Arts. — Bruxelles.

DE LIMBURG-STIRUM (C^te Adolphe), 30, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

DE LIMBURG-STIRUM (C^te Samuel), 30, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

DE LIMBURG-STIRUM (C^te Thierry), sénateur, rue Hautport. — Gand.

DE LIMMINGHE (C^te), château de Gesves, par Assesse (Namur).

LIMPENS (Émile), avocat, place Impériale. — Alost.

DE LISLEFERME (E.-Henry), ingénieur de la marine en retraite. — Taillebourg (Charente-Inférieure — France).

DE LOCHT (Léon), ingénieur, Mont-Saint-Martin. — Liège.

LUCAS, S. J. (R. P. Désiré), 11, rue des Récollets. — Louvain.

MABILLE (Léon), professeur à l'Université de Louvain, 49, rue Royale. — Bruxelles.

MAERTENS (chanoine), professeur au Petit-Séminaire. — Saint-Nicolas.

MALCORPS (Ernest), avocat, 5, rue des Vaches. — Louvain.

MALISOUX (Émile), ingénieur principal de 1^re classe des mines, 11, rempart ad aquam. — Namur.

MANSION (Paul), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 6, quai des Dominicains. — Gand.

DE MARET (Adhémar). — Stavelot.

DE MARSILLY (Général), Grand-Hôtel de Paris, rue Bab-el-Oued. — Alger.

MARTENS (Édouard), professeur à l'Université, 27, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

MARTINEZ Y SAEZ (Francisco de Paula), professeur de zoologie au Musée d'histoire naturelle, plaza de Ministerios, 5, 3°, izq. — Madrid (Espagne).

MAS, S. J. (R. P. Bartolomé), colegio de S. Ignacio. — Manresa.

MASOIN (E.), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine, 15, place Sainte-Anne. — Louvain.

MATAGNE (Jules), docteur en médecine, 21, rue de la Fontaine. — Bruxelles.

DE MAUPEOU (C^te), ingénieur de la marine, 30, rue Vital. — Passy-Paris.

MAYER (Henri), avocat, 31, rue Saint-Jacques. — Tournay.
DE MEEUS (C$^{te}$ Henri), ingénieur, 72, rue du Vertbois. — Liège.
MEEUS (Eugène), membre de la Chambre des Représentants, 42, rue Houblonnière. — Anvers.
MEEUS-HONNOREZ (L.), distillateur. — Wyneghem par Anvers.
MÉLINGE (abbé Calixte), docteur en théologie, 6, rue des Petites-Allées. — Rochefort-sur-Mer (Charente-Inférieure — France).
DE MENDIZABAL TAMBORREL (Joaquin), ingeniero geógrafo, profesor de astronomía y geodesía en el Colegio militar, observatorio meteorologico central. — Mexico (Mexique).
MENGELLE (Bertrand), ingénieur de l'École centrale des arts et manufactures, 75, rue Royale. — Bruxelles.
MERCIER (Mgr D.), collège du Saint-Esprit, rue de Namur. — Louvain.
MERTENS (Guill.), ingénieur, directeur de l'usine à gaz, 73, rue de Tourcoing. — Roubaix (Nord — France).
MICHA, professeur à l'Université, 8, place du Peuple. — Louvain.
MICHAUX (B$^{on}$), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine. — Louvain.
MIOT (Léopold), docteur en médecine, de l'Académie royale de médecine, 15, rue de Beaumont. — Charleroi.
MIR, S. J. (R. P. Michel), membre de l'Académie royale d'Espagne, Colegio del Salvador. — Zaragoza (Espagne).
MIRANDA BISTUER (Julian), canónigo magistral de la catedral, canongia nueva, 18. — Segovia (Espagne).
MISONNE (Lucien), directeur-gérant des charbonnages du Hasard. — Tamines (Namur).
MISSON (B$^{on}$), à Vieux-Waleffe, par Fallais (Liège).
MOELLER, docteur en médecine, 1, rue Montoyer. — Bruxelles.
MONCHAMP (abbé Georges), docteur en théologie et en philosophie, professeur au Petit-Séminaire. — Saint-Trond.
MONCHEUR (B$^{on}$), 54, boulevard de Waterloo. — Bruxelles; ou Naméche (Namur).
DE MONGE (Léon), professeur à l'Université, rue aux Joncs. — Louvain.
MONSARRAT (G.), 14, rue des Capucines. — Paris.
DE MONTGRAND (M$^{is}$), propriétaire à Saint-Menet. — Marseille (Bouches-du-Rhône — France).
DE MOREAU D'ANDOY (Ch$^{er}$). — Andoy par Jambes (Namur).
MORETUS (René), place de Meir. — Anvers.

MULLENDERS (Joseph), ingénieur, 21, rue Duvivier. — Liège.
DE NADAILLAC (M^is), 8, rue d'Anjou. — Paris.
NAMÈCHE (Mgr), ancien recteur magnifique de l'Université.— Louvain.
DE NAMUR D'ELZÉE (C^te), sénateur. — Dhuy par Éghezée (Namur).
NÈVE (Félix), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 52, rue des Orphelins. — Louvain.
NÈVE (Louis), ingénieur. — Brecht (Anvers).
NEWTON (Général John), 279, Adelphi Street. — Brooklyn, New-York.
NICOT, S. J. (R. P.). — Dunbrody, Blue Cliff Station, via Capetown (Afrique australe).
NISOT (Victor), ingénieur, docteur en sciences physiques et mathématiques, 44, rue de la Loi. — Bruxelles.
NOLLÉE DE NODUWEZ, 116, rue Royale. — Bruxelles.
NYSSENS (Albert), professeur à l'Université. — Louvain.
NYSSENS (Julien), ingénieur des ponts et chaussées, 190, rue de la Loi. — Bruxelles.
NYSSENS (Pierre), directeur au laboratoire agricole de l'État, 19, rue Sainte-Marguerite. — Gand.
OBET DE CHEVVEL, docteur en médecine. — Honfleur (Calvados — France).
D'OCAGNE (Maurice), ingénieur, 12, rue Bonhomme. — Cherbourg (Manche — France).
OLDENHOVE (Philippe), ingénieur, propriétaire à Florival-sur-Dyle, par Grez-Doiceau (Brabant).
O'MALLEY, S. J. (R. P.), S^t Patrick's college. — Melbourne (Victoria — Australie).
ORTIZ (Juan-Miguel), Jefe superior de Administracion, Guanabacoa. — Habana (Cuba).
ORTIZ (Il^mo Sr Dr. D. Luis Felipe), obispo de Coria (Espagne).
OSY DE WICHEM (B^on), longue rue de l'Hôpital. — Anvers.
OTTO (Jean), 36, Marché-aux-Herbes. — Bruxelles.
OUVERLEAUX (Félix), docteur en droit, 112, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.
PARDON (Gustave), ingénieur. — Frameries (Hainaut).
PASQUIER (Ern.), professeur à l'Université, 22, rue Marie-Thérèse. — Louvain.
PATRONI (Monsign. Giuseppe), dott. in filosofia, in teologia ed in ambe le leggi, 47, piazza del Gesù. — Rome.
PECHER (Eugène), 64, avenue Louise. — Bruxelles.

PELLIGERO (Gonzalo), avocat, rédacteur en chef de la *Voz de Cuba*. — La Havane (Cuba).

DE PEÑARANDA (Frédéric), 21, rue de la Science. — Bruxelles.

PEPIN, S. J. (R. P. Théophile), École libre Saint-Michel. — Saint-Étienne (Loire — France).

PERETTI (abbé J.), curé de Sainte-Marie. — Calvi (Corse — France).

PEREZ (Miguel), director del Observatorio central, 1ª calle de la Merced, nº 27. — Mexico (Mexique).

PEREZ MORENO (Andrés), inspector general del cuerpo de ingenieros de minas de España, calle de Recoletos, 5, 3º dra. — Madrid (Espagne).

PERRY, S. J. (R. P.), directeur de l'Observatoire de Stonyhurst, de la Société royale de Londres. — Stonyhurst near Blackburn (Angleterre).

PETIT (chanoine), rue de l'Arsenal. — Namur.

PEYROT (Gérard), 33, rue Vieille-Bourse. — Anvers.

PICHAULT (Stéphane), ingénieur, directeur des ateliers de construction de la Société Franco-Belge. — Raisnes (Nord — France).

DE PILLON DE S. PHILBERT (A.), 2, rue St-Thomas. — Douai (Nord — France).

PIRARD (chanoine), vicaire général, 6, boulevard Léopold. — Namur.

PISCÉ (chanoine), rue des Bateaux. — Malines.

PLANTÉ (Gaston), licencié ès sciences, 12, rue des Vosges. — Paris.

POISOT (Maurice), avocat, 4, rue Buffon. — Dijon (Côte-d'Or — France).

DE PONTHIÈRE (Albert), propriétaire-agriculteur, 23, rue d'Archis. — Liège.

POWIS DE TEN BOSSCHE, membre de la Chambre des Représentants, 8, rue Belliard. — Bruxelles.

DE PRELLE, 44, rue Kipdorp. — Anvers.

PROOST (Alphonse), inspecteur général de l'agriculture, professeur à l'Université de Louvain, 30 A, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

PROVINCIAL (R. P.) de la compagnie de Jésus, 131, rue Royale extérieure. — Bruxelles.

PRUDHAM (abbé), directeur du collège Stanislas, rue N.-D. des Champs. — Paris.

PUGA (Guillermo B. y), ingeniero topógrafo, profesor de Geologia en la Escuela nacional de Agricultura, calle del Tompeate, 2. — Mexico (Mexique).

QUAIRIER, 29, boulevard du Régent. — Bruxelles.
RACHON (abbé Prosper), curé de Ham et Saint-Jean, par Longuyon (Meurthe-et-Moselle — France).
RACLOT (abbé V.), aumônier des hospices et directeur de l'observatoire. — Langres (Haute-Marne — France).
RAMIREZ (Santiago), ingeniero de minas, calle de Buenavista, 15 $^1/_2$ — Mexico (Mexique).
RATHOUIS, S. J. (R. P.). — Zi-ka-wey (Chine).
RAVAIN (abbé J.-R.), 14, rue Bernier. — Angers (Maine-et-Loire — France).
RECTEUR (R. P.), rue de Tongres, 2237. — Maestricht (Limbourg hollandais).
RECTOR (R. P.) del Colegio de San José. — Valladolid (Espagne).
RECTOR (R. P.) del Colegio del Jesus. — Tortosa (prov. de Tarragona — Espagne).
DE REGNON, S. J. (R. P. Théodore), 391, rue de Vaugirard. — Paris.
RENARD (abbé Alphonse), conservateur honoraire au Musée d'histoire naturelle, professeur à l'Université de Gand. — Wetteren (Flandre-Orientale).
REYNAERT, docteur en médecine, rue du Progrès. — Saint-Nicolas.
DE RIBAUCOURT (C^te^), sénateur, 27, rue de Loxum. — Bruxelles.
ROBERTI (Jules), sénateur. — Louvain.
ROBYNS D'INKENDAELE (Frantz), chargé d'affaires honoraire, consul général de Monaco, 56, rue du Marteau. — Bruxelles.
DE LA ROCHE (Ch^er^ Camille), rue de Houdain. — Mons.
DE LA ROCHE DE MARCHIENNES (Émile). — Harvengt, par Harmignies (Hainaut).
RODILLON (abbé Pr.), professeur de philosophie au Petit-Séminaire de la Primatiale, 1, rue Tramassac. — Lyon (Rhône — France).
ROJAS, S. J. (R. P.), professeur d'histoire naturelle, Colegio. — Orduña (Vizcaya — Espagne).
DE ROUILLÉ (C^te^), 44, avenue des Arts. — Bruxelles.
ROUSSEL (Lucien), professeur à l'École forestière, 11, rue de la Ravinelle. — Nancy (Meurthe-et-Moselle — France).
DE RUBEMPRÉ (P^ce^), rue aux Laines. — Bruxelles; ou à Westerloo.
SAEY (Henri), notaire. — Renaix.
SABY (Joseph), 18, avenue de la porte de Hal. — Bruxelles.

Saey (abbé Pr.), curé à Woubrechtegem, par Herzele (Flandre-Orientale).

de Salvert (Vte), professeur aux Facultés catholiques de Lille, château de Villebeton, par Châteaudun (Eure-et-Loir — France).

Sanchez, S. J. (R. P. Hilario), Colegio. — Carrion (Palencia — Espagne).

de Santa Cruz (Ivan Armada Hernandez de Cordova, Mis), 9, rua Nueva. — Santiago (Galice — Espagne).

Sanz (Pelegrin), ingeniero civil. — Castellon de la Plana (Espagne).

Sanz y Lopez (Cesareo), profesor de matemáticas, calle del Colegio de Doncellas. — Toledo (Espagne).

Scarsez de Locqueneuille (Anatole), château de St-François. — Farciennes (Hainaut); ou 153, chaussée de Vleurgat. — Ixelles.

Schmidt (Henri), intendant de la maison de Croy. — Le Rœulx.

Schobbens, docteur en médecine, 49, longue rue Neuve. — Anvers

Schoemaker (W.-J.), professeur à l'École moyenne. — Nimègue (Pays-Bas).

de Schoutheete de Tervarent (Cher). — Saint-Nicolas.

Simonis (Alfred), sénateur. — Verviers.

Simonis (Iwan), industriel. — Verviers.

Simonis (Louis), industriel. — Verviers.

Siret (Henri), ingénieur, 11, rue Saint-Joseph. — Anvers.

Siret (Louis), ingénieur, Parazuelos Aguilas (prova Murcia — Espagne).

Smekens (Théophile), président du tribunal de 1re instance, 31, avenue Quentin Metsys. — Anvers.

Smets (abbé Gérard), docteur en sciences naturelles, professeur de sciences au Collège St-Joseph. — Hasselt.

del Socorro (José Maria Solano, Mis), professeur de géologie au Musée d'histoire naturelle, calle de Jacometrezo, 41, bajo. — Madrid (Espagne).

del Solar (Eulogio), ingeniero de minas, plaza de la Independencia, 9, bajo. — Madrid (Espagne).

Solvyns (Albert), 7, avenue de la Place-d'Armes. — Gand.

Soreil, ingénieur. — Maredret sous Sosoye, par Anthée (Namur).

de Sparre (Cte), professeur aux Facultés catholiques de Lyon, château de Vallière. — Saint-Georges-de-Reneins (Rhône — France).

Spina, S. J. (R. P. Pedro), Colegio de S. Juan Nepomuceno. — Saltillo (Coahuila — Mexique).

SPRINGAEL (Auguste), ingénieur, 1, rue Vallez. — Uccle.
STAINIER (Xavier), 78, chaussée de Wavre. — Bruxelles.
STILLEMANS (chanoine A.), docteur en philosophie et lettres, président du Grand Séminaire. — Gand.
STINGLHAMBER (Émile), docteur en droit, 31, rue des Minimes. — Bruxelles.
STOESSER (Alphonse), directeur-gérant de la Société anonyme du charbonnage de Sacré-Madame. — Dampremy (Hainaut).
STOFFAES (abbé), licencié ès sciences, 54, boulevard Vauban — Lille (Nord — France).
STORMS (abbé Camille), curé de Ganshoren, par Jette (Brabant).
STORMS (John), 37, rue des Champs-Élysées. — Bruxelles.
STORMS (Raymond), 13, rue du Président. — Bruxelles.
STRUELENS (Alfred), docteur en médecine, 24, rue de l'Hôtel-des-Monnaies. — Saint-Gilles (Bruxelles).
SUCHETET (André), 10, rue Alain Blanchard. — Rouen (Seine-Inférieure — France).
SUTTOR (Eugène), ingénieur honoraire des ponts et chaussées, 19, rue des Bogards. — Louvain.
SWOLFS (chanoine), professeur au Petit-Séminaire. — Malines.
TAYMANS (Émile), avocat. — Mont-Saint-Guibert (Brabant).
TEIXEIRA (Gomes), professeur à l'École polytechnique. — Porto (Portugal).
TERCELIN (Félix), rue du Mont-de-Piété. — Mons.
THEUNIS (Auguste), répétiteur à l'Université, 83, rue de Tirlemont. — Louvain.
THIBAUDIER, ingénieur de la marine. — Rochefort-sur-Mer (Charente-Inférieure — France).
THIBAUT (L.), ingénieur. — Châtelet (Hainaut).
THIÉBAULD (Charles), avocat, 60, rue Saint-François. — Bruxelles.
THIRION (Alphonse). — Sclayn par Namèche (Namur).
THIRION, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.
TIMMERMANS (François), ingénieur, directeur-gérant de la Société anonyme des ateliers de construction de la Meuse, 24, rue de Fragnée. — Liège.
TORROJA Y CABALLÉ (Eduardo), architecte, professeur à la Faculté des sciences de l'Université, calle Duque de Alba, 15, 2°. — Madrid (Espagne).

Tras, S. J. (R. P.), professeur au collège de la Paix. — Namur.
de Trazegnies (M$^{is}$). — Corroy-le-Château, par Gembloux.
de T'Serclaes (Mgr Charles), président du Collège belge. — Rome.
de T'Serclaes (C$^{te}$ Jacques), capitaine au 1$^{er}$ rég. d'artillerie, 106, rue Marie-Thérèse. — Louvain.
t'Serstevens (Léon), 52, boulevard Bischoffsheim. — Bruxelles.
Tykort (Émile), ingénieur civil. — Perck, par Vilvorde.
d'Ursel (C$^{te}$ Aymard), capitaine d'artillerie, 25, rue de la Science. — Bruxelles.
d'Ursel (C$^{te}$ Charles), gouverneur de la province du Hainaut. — Mons.
du Val de Beaulieu (C$^{te}$), 55, avenue des Arts. — Bruxelles.
de la Vallée Poussin (Charles), de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 190, rue de Namur. — Louvain.
Van Aertselaer (chanoine), directeur de l'Institut S$^{t}$-Louis, 121, rue du Marais. — Bruxelles.
Van Biervliet (Alb.), professeur à l'Université catholique, 39, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.
Vanden Berg (Charles), notaire, place Saint-Paul. — Liége.
vanden Branden de Reeth (Mgr), Évêque d'Érythrée, au Collège Belge. — Rome.
Vanden Broeck (Arthur), 85, rue Jourdan. — Bruxelles.
Vanden Gheyn (abbé Gabriel), supérieur à l'Institut Saint-Liévin. — Gand.
Vanden Gheyn, S. J. (R. P. Joseph), 35, rue de Sèvres. — Paris.
Vanden Peereboom (E.), ingénieur, 15, rue d'Artois. — Liége.
Vanden Peereboom (Jules), ministre des chemins de fer, postes et télégraphes. — Courtrai.
vanden Steen de Jehay (C$^{te}$ Hermann), capitaine d'état-major, 6, avenue Louise. — Bruxelles.
vander Bruggen (B$^{on}$ Maurice), rue du Gouvernement. — Gand.
Vander Haeghen (William), avocat, 44, rue Berckmans. — Bruxelles.
Vander Smissen (Édouard), avocat, 16, rue du Gouvernement-Provisoire. — Bruxelles.
vander Straten-Ponthoz (C$^{te}$ François), 13, rue de la Loi. — Bruxelles.
Vander Voordt (Jules), ingénieur, 83, marché aux Chevaux. — Anvers.
Van de Woestyne (chanoine), professeur au Grand-Séminaire. — Bruges.

VAN DORPE (Jules), docteur en médecine, 297, rue Rogier. — Bruxelles.
VAN DRÈCHE, docteur en médecine, rue de l'Ouvrage. — Namur.
VAN DROMME, docteur en médecine, rue des Chartreuses. — Bruges.
VAN GAMEREN (chanoine), rue du Bruul. — Malines.
VAN GOIDSNOVEN, docteur en médecine, 45, rue de la Casquette. — Liège.
VAN KEERBERGHEN, docteur en médecine, 161, chaussée d'Ixelles. — Bruxelles.
VANNUTELLI (S. E. le cardinal). — Rome.
VAN ORTROY (Fernand), lieutenant adjudant-major au 1er régiment de chasseurs à cheval, 14, rue Saint-Jean. — Tournay.
VAN OVERLOOP (Eugène), sénateur, 48, rue Royale. — Bruxelles.
VAN SEGVELT (Edmond), 112, boulevard des Arbalétriers. — Malines.
VAN TRICHT, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.
VAN ZEEBROECK (abbé), directeur à l'Établissement des Sœurs-Grises. — Diest.
VAN ZUYLEN-ORBAN (Gust.), industriel, 8, quai de l'Industrie. — Liège.
VAULTRIN, inspecteur des forêts, 30, rue Saint-Vincent. — Foix-sur-Ariège (Ariège — France).
VAZQUEZ ILLA (Ricardo), comandante de infanteria, calle de la Catedral, 9. — Valladolid (Espagne).
VENNEMAN, docteur en médecine, professeur à l'Université. — Louvain.
VERCRUYSSE (Victor), 61, rue de France. — Courtrai.
VERHELST (abbé), professeur à l'Institut Saint-Boniface, chaussée d'Ixelles. — Bruxelles.
VERRIEST (G.), docteur en médecine, professeur à l'Université, 25, rue des Écreniers. — Louvain.
VICAIRE (Eugène), ingénieur en chef des mines, 30, rue Gay-Lussac. — Paris.
VICENT, S. J. (R. P. Antonio), Colegio de San José. — Valencia (Espagne).
VILAIN XIIII (Vte), sénateur, 11, rue du Trône. — Bruxelles.
VILLAFUERTE (Eliodoro), presbitero, 86, calle de las Delicias. — Santiago (Chili).
VILLAUME, S. J. (R. P.), professeur de physique, maison Saint-Augustin. — Enghien.
DE VILLEGAS DE SAINT-PIERRE (Cte Ulric). — Ganshoren par Jette (Brabant); ou 1, rue de Spa. — Bruxelles.

DE VILLERS-VERGAUWEN, 12, marché au Lin. — Gand.
VILLIÉ, professeur aux Facultés catholiques, 78, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).
VIÑES (R. P. Benito), director del Observatorio, colegio de Belen. — La Havane (Cuba).
VISART DE BOCARMÉ (Cte Amédée), bourgmestre de Bruges.
DE VOCHT (abbé), curé de Zeelst, par Eindhoven (Brabant-Septentrional — Pays-Bas).
DE VORGES (E. Domet), 74, rue Miromesnil. — Paris.
WALRAVENS (abbé Adelson), directeur du collège d'Enghien.
WARD (John), ingénieur civil, 73, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.
WARLOMONT (René), docteur en médecine et en sciences naturelles, médecin de bataillon au 3e lanciers, 1, rue Longue. — Bruges.
WASSEIGE (Armand) banquier, 2bis, rue Godefroid. — Namur.
WAUTELET (A), ingénieur à l'usine à gaz. — Roubaix (Nord — France).
DE WAVRIN (Mis), château de Ronsele (Flandre-Orientale).
DE WECK (abbé A.), missionnaire apostolique. — Fille-Dieu sous Romont (Canton de Fribourg — Suisse).
WÉRY (Vincent), président du tribunal de 1re instance, 4, rue des Telliers. — Mons.
WITTMANN (Jules), docteur en médecine. — Malines.
WITZ (Aimé), professeur aux Facultés catholiques, 104, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).
WOLF, membre de l'Institut, 95, rue des Feuillantines. — Paris.
DE WOUTERS (chanoine). — Braine-le-Comte.
DE WOUTERS (Cher Lambert), Rotselaer, par Wespelaer (Brabant).
WOUTERS (abbé Louis), professeur de sciences naturelles au Collège Saint-Rombaut. — Malines.
ZECH (Guillaume), négociant. — Braine-le-Comte.

---

## Liste des membres décédés.

(Avril 1888-mai 1889.)

| | |
|---|---|
| Cte Charles d'Aspremont-Lynden . . . . . . . | Haltinnes. |
| Fernando Bernaldez. . . . . . . . . . . . | Madrid |
| Fr. de Cannart d'Hamale . . . . . . . . . | Malines. |
| R. P. Carbonnelle, S. J. . . . . . . . . . | Bruxelles. |
| Chan. Colson . . . . . . . . . . . . . . | Bierbais. |
| Dr Cousot . . . . . . . . . . . . . . . | Dinant. |
| Dr L. Delgeur. . . . . . . . . . . . . . | Anvers. |
| Max Deprez . . . . . . . . . . . . . . | Mons. |
| Bon G. de Joigny . . . . . . . . . . . . | Bruxelles. |
| Jules Lava . . . . . . . . . . . . . . . | Bruxelles. |
| Vte de Patin de Langemarck . . . . . . . . | Langemarck. |
| Narciso Romero . . . . . . . . . . . . . | Madrid. |
| Dr Schneider . . . . . . . . . . . . . . | Bruxelles. |

---

## Listes des membres inscrits dans les sections.

### 1re Section.

*Mathématiques, Astronomie, Géodésie. — Mécanique. — Génie civil et militaire.*

MM. Antoine d'Abbadie.
Adan de Yarza.
R. P. Alcolado, S. J.
Baule.
Théodore Belpaire.
R. P. de Benazé, S. J.
Pce Boncompagni.
Boussinesq.
du Boys.
R. P. Braun, S. J.

MM. N. Breithof.
L. de Bussy.
Joseph Carnoy.
Abbé Clasen.
Abbé Coppieters de Stockhove.
L. Cousin.
R. P. Delsaulx, S. J.
J. De Tilly.
Dusausoy.
R. P. d'Esclaibes, S. J.

MM. Eynaud.
Franc.
Gauthier-Villars.
Abbé Gelin.
Ph. Gilbert.
Goedseels.
B^on G. Greindl.
de Grossouvre
C^te François de Grunne.
Guyétand.
Haton de la Goupillière.
Charles Hermite.
Iñiguez.
Général Jacmart.
Jenner.
Jimeno.
Amiral de Jonquières.
Camille Jordan.
R. P. Joubert, S. J.
Lacor.
R. P. Lafont, S. J.
Charles Lagasse.
Camille Lambert.
R. P. Dom Lamey.
Abbé Bruno Lefebvre.
C. Le Paige.
C^te Charles de Liedekerke.
de Lisleferme.
Léon de Locht.
R. P. Lucas, S. J.
Paul Mansion.
de Marsilly.
C^te de Maupeou.

MM. J. de Mendizabal.
Micha.
Général John Newton.
Nisot.
J. Nyssens.
P. Nyssens.
d'Ocagne.
Pasquier.
R. P. Pepin, S. J.
M. Perez.
R. P. Perry, S. J.
Chanoine Piscé.
V^te de Salvert.
Sanz y Lopez.
P. Sanz.
C^te de Sparre.
Stoffaes.
Suttor.
Teixeira.
R. P. Thirion, S. J.
François Timmermans.
Torroja.
C^te Jacques de T'Serclaes
C^te Aymard d'Ursel.
E. Vandenpeereboom.
Abbé Van Zeebroeck.
Vazquez Illá.
Vicaire.
Villafuerte.
Villié.
John Ward.
Aimé Witz.

## 2e Section.

*Physique. — Chimie. — Métallurgie. — Météorologie et Physique du Globe.*

MM. Alfageme.
A. Béchamp.
Charles Blas.
Alfred Blondel.
Bonamis.
Auguste Bonnevie.
Branly.
Bruylants.
Antonio Casares.
Chautard.
R. P. Choné, S. J.
Abbé J. Delorge.
Herman De Preter.
A. Devivier.
François Dewalque.
Dincq-Jordan.
André Dumont.
R. P. Dumont, S. J.
Dutordoir.
Feliù y Perez.
R. P. François, S. J.
R. P. George, S. J.
Gérard.
Gillet.
R. P. Granero, S. J.
Gravez.
Grisar.
Hector Henry.
Louis Henry.
Kennis.

MM. René Kerviler.
Jules Lagasse.
Lambiotte.
Lemoine.
Malisoux.
Mertens.
Lucien Misonne.
Mis de Montgrand.
Joseph Mullenders.
Oldenhove.
R. P. O'Malley, S. J.
Louis Nève.
Ouverleaux.
Pichault.
Abbé Pirard.
G. Planté.
Abbé Raclot.
Abbé Ravain.
R. P. de Regnon, S. J.
de Souza Gonzalvès.
Springael.
Auguste Theunis.
R. P. Tras, S. J.
Tykort.
A. Van Biervliet.
Jules Vander Voordt.
R. P. Van Tricht, S. J.
R. P. Villaume, S. J.
R. P. Viñes, S. J.

## 3e Section.

*Géologie, Minéralogie. — Botanique. — Zoologie. — Paléontologie. — Anthropologie, Ethnographie, Science du langage. — Géographie.*

**Mgr** Abbeloos.
**MM.** d'Acy.
Fr. Alexis.
Almera.
Arcelin.
Cte Alb. d'Auxy de Launois.
Ch. Baguet.
Baillon.
Bapst.
Abbé Bardin
Ern. Bayet
Cte H. de Beauffort.
Bernardin.
Mis de la Boëssière-Thiennes.
Abbé Boulay.
Abbé Bourgeat.
Buisseret, Anat.
Buisseret, Jos.
Casares Firmino.
Dassonville.
Abbé De Brouwer.
R. P. Delattre, S. J.
Chanoine Delvigne.
Abbé Descamps.
Abbé Detierre.
Gustave Dewalque.
Dollo.
Abbé Ducrost.
Max Dugniolle.
Fauvel.
R. P. Fita, S. J.
Flahault.
**MM.** Floren.
Docteur Foerster.
Fontaine.
Abbé de Foville.
R. P. Gerste, S. J.
Grand'Eury.
Grinda.
Abbé Hamard.
Cte de Hemptinne.
Cte d'Hemricourt de Grunne.
Abbé Joseph Hervier.
R. P. Heude, S. J.
R. P. Kirsch.
Charles de Kirwan.
Godefroid Kürth.
Abbé Laleu.
A. de Lapparent.
Abbé Ferdinand Lefebvre.
Cte G. de Lichtervelde.
Cte Adolphe de Limburg Stirum.
Édouard Martens.
Martinez y Saez.
Abbé Mélinge.
R. P. Mir, S. J.
Abbé Monchamp.
Mis de Nadaillac.
Perez Moreno.
Puga.
Abbé Rachou.
R. P. Rathouis, S. J.
Ramirez.
Abbé Renard.

MM. Ém. de la Roche.
R. P. Rojas, S. J.
H. Siret.
L. Siret.
Abbé Smets.
Mis del Socorro.
E. del Solar.
Albert Solvyns.
Stainier.
John Storms.
R. Storms.
Chanoine Swolfs.
Cte Charles d'Ursel.

MM. Charles de la Vallée Poussin.
R. P. Van den Gheyn, S. J.
Abbé G. Van den Gheyn.
Van Drèche.
Van Ortroy.
Van Overloop.
Van Segvelt.
Abbé Verhelst.
R. P. Vicent, S. J.
Abbé de Vocht.
de Vorges.
Mis de Wavrin.
Abbé Wouters.

## 4e Section.

*Anatomie, Physiologie. — Hygiène. — Pathologie, Thérapeutique, etc.*

MM. Augier.
Barcia Caballero.
Borginon.
Abel Bourdeau.
Bribosia.
Charlier.
G. Cousot.
P. J. E. Craninckx.
Cuylits.
Debaisieux.
Desplats.
A. Dumont.
A. Faucon.
Feijeiro.
Finlay.
Xavier Francotte.
Gallez.
Goix.
Goris.
Haan.

MM. R. P. Hahn, S. J.
Hayoit.
Heymans.
Houze.
Eugène Hubert.
Janssens.
Alexandre Lagasse.
Lebon.
Charles Ledresseur.
Lefebvre.
E Masoin.
Jules Matagne.
Michaux.
Miot.
Mœller.
Obet.
Proost.
Reynaert.
Schobbens.
Struelens.



MM. Van Dorpe.
Van Goidsnoven.
Van Keerberghen.
Venneman.

MM. Verriest.
R. Warlomont.
Wittmann.

## 5e Section.

*Agronomie. — Économie sociale, Statistique. — Sciences commerciales — Économie industrielle.*

MM. Adolphe Berleur.
Victor Bonnevie.
Ern. de Borman.
Armand Brifaut.
Jules Cartuyvels.
Davignon.
Pce Gustave de Croy.
Pce Juste de Croy.
Herman De Baets.
Tony De Bruyn.
Camille De Jaer.
De Lantsheere.
De Marbaix.
E. Descamps.
Ferdinand Dohet.
Focillon.
Paul de Gerlache.
Grandmont.
Grenier.
Bon de Haulleville.
Cte de Hemptinne.
J. Houtart.
Claudio Jannet.
Vte Eugène de Kerckhove.
Paul Lefebvre
Legrand-Benoit.
Cte Ferdinand Le Grelle.

MM. Cte Édouard de Liedekerke.
Émile Limpens.
Henri Mayer.
Léon de Monge.
Cher de Moreau d'Andoy.
Otto.
Pecher.
Pelligero.
A. de Pontbière.
Pce de Rubempré.
Henri Saey.
Henri Schmidt.
Théophile Smekens.
Émile Stinglhamber.
Charles Thiébauld.
Léon t'Serstevens.
E. Vander Smissen.
Cte Fr. vander Straten-Ponthoz.
Van Zuylen-Orban.
Vte Vilain XIIII.
Cte Ulric de Villegas de Saint-Pierre.
Cte Amédée Visart.
Abbé Adelson Walravens.
Armand Wasseige.
Vincent Wéry.

## MEMBRES DU CONSEIL.

1887 - 1888.

—

*Président,* M. le Général Jacmart.

1er *Vice-Président,* M. François Dewalque.

2e *Vice-Président,* M. André Dumont.

*Secrétaire,* R. P. Carbonnelle.

*Trésorier,* M. Jules De Bruyn.

MM. le Mis de la Boëssière-Thiennes.
Fr. de Cannart d'Hamale.
L. Cousin.
L. Delgeur.
Chanoine Delvigne.
G. Dewalque.
Ph. Gilbert.
E. Goedseels
L. Henry.
Ch. Lagasse.
Dr Lefebvre.
P. Mansion.
A. Proost.
Léon t'Serstevens.
Cte Fr. vander Straten-Ponthoz

## MEMBRES DU CONSEIL.

1888 - 1889.

—

*Président*, M. Georges LEMOINE.
1er *Vice-Président*, M. Louis COUSIN.
2e *Vice-Président*, M. Charles LAGASSE.
*Secrétaire*, R. P. CARBONNELLE.
*Trésorier*, M. Jules DE BRUYN.

MM. le Mis DE LA BOËSSIÈRE-THIENNES.
L. DELGEUR.
Chanoine DELVIGNE.
Fr. DEWALQUE.
G. DEWALQUE.
André DUMONT.
Ph. GILBERT.
E. GOEDSEELS.
L. HENRY.
Général JACMART.
Dr LEFEBVRE.
P. MANSION.
A. PROOST.
Léon T'SERSTEVENS.
Cte Fr. VANDER STRATEN-PONTHOZ.

## BUREAUX DES SECTIONS.

1887 - 1888.

—

### 1re Section.

*Président*, R. P. Perry.
*Vice-Présidents*, MM. Mansion et Cousin.
*Secrétaire*, M. Dutordoir.

### 2e Section.

*Président*, M. Fr. Dewalque.
*Vice-Présidents*, M. L. Thibaut et R. P. Van Tricht.
*Secrétaire*, M. A. Van Biervliet.

### 3e Section.

*Président*, R. P. Vanden Gheyn.
*Vice-Présidents*, MM. L. Delgeur et chanoine Delvigne.
*Secrétaire*, M. A. Buisseret.

### 4e Section.

*Président*, M. Schneider.
*Vice-Présidents*, MM. Venneman et Moeller.
*Secrétaire*, M. Ach. Dumont.

### 5e Section.

*Président*, M. Paul de Gerlache.
*Vice-Présidents*, MM. De Marbaix et Ch. Thiébauld.
*Secrétaire*, M. L. De Lantsheere.

## BUREAUX DES SECTIONS.

1888-1889.

—

### 1re Section.

*Président*, M. l'abbé E. Gelin.

*Vice-Présidents*, MM. de Jonquières et E. Suttor.

*Secrétaire*, M. Dutordoir.

### 2e Section.

*Président*, M. Fr. Dewalque.

*Vice-Présidents*, MM. L. Thibaut et R P. George.

*Secrétaire*, M. A. Van Biervliet.

### 3e Section.

*Président*, M. Ch. de Kirwan.

*Vice-Présidents*, MM. H. Siret et L. Delgeur.

*Secrétaire*, M. A. Buisseret.

### 4e Section.

*Président*, M. Venneman.

*Vice-Présidents*, MM. Cuylits et Moeller.

*Secrétaire*, M. A. Dumont.

### 5e Section.

*Président*, M. Paul de Gerlache.

*Vice-Présidents*, MM. De Marbaix et Ch. Thiébauld.

*Secrétaire*, M. L. De Lantsheere.

———

# SESSIONS DE 1888-89

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

La Société a tenu trois sessions pendant cette douzième année:

La première, le jeudi 27 octobre 1887 ;

La seconde, le jeudi 26 janvier 1888 ;

Et la troisième, le mardi 3, le mercredi 4 et le jeudi 5 avril 1888.

## SÉANCES DES SECTIONS

### Première section.

*Jeudi, 27 octobre 1887.* — M. Goedseels expose une méthode pour la multiplication de deux déterminants d'ordres différents, et l'application de cette méthode à la généralisation d'un théorème sur les déterminants adjoints.

M. Mansion expose une conjecture relative à une table contenue dans le papyrus Rhind, traduit par Eisenlohr. « Dans ce manuel très ancien d'arithmétique égyptienne, on trouve une table de décomposition des fractions

$$\frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \ldots, \frac{2}{93}, \frac{2}{95}, \frac{2}{97}, \frac{2}{99}$$

en *quantièmes*, c'est-à-dire en fractions à numérateur égal à l'unité. Voici, par exemple, quelques-unes de ces décompositions :

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}, \quad \frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}, \quad \frac{2}{17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68},$$

$$\frac{2}{95} = \frac{1}{60} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570}, \quad \frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}, \quad \frac{2}{99} = \frac{1}{66} + \frac{1}{198}.$$

On s'est demandé comment les Égyptiens ont pu construire cette table. M. Cantor a fait observer que, pour toutes les fractions à dénominateur multiple de 3, la décomposition est effectuée d'après le type suivant :

$$\frac{2}{3n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n}.$$

Mais on n'a pas indiqué, que nous sachions, le principe qui a guidé les arithméticiens des bords du Nil dans les autres décompositions.

Ce principe semble le suivant : *Entre toutes les décompositions possibles, choisir celle qui conduit à une dernière fraction de dénominateur le plus petit.* Toutefois, entre deux décompositions conduisant à des dernières fractions peu différentes, on préférera choisir la fraction de dénominateur le plus grand, si ce dénominateur est divisible par 2 et par 3.

Exemple :

$$\frac{2}{17} = \frac{1}{9} + \frac{1}{153},$$

$$\frac{2}{17} = \frac{1}{10} + \frac{1}{85} + \frac{1}{170},$$

$$\frac{2}{17} = \frac{1}{11} + \text{fractions compliquées},$$

$$\frac{2}{17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68},$$

$$\frac{2}{17} = \frac{1}{13} + \text{fractions compliquées}.$$

$$\frac{2}{17} = \frac{1}{14} + \frac{1}{34} + \frac{1}{68} + \frac{1}{476},$$

$$\frac{2}{17} = \frac{1}{15} + \frac{1}{34} + \frac{1}{85} + \frac{1}{102},$$

$$\frac{2}{17} = \frac{1}{16} + \frac{1}{34} + \frac{1}{68} + \frac{1}{136} + \frac{1}{272}.$$

De ces huit décompositions, c'est la quatrième qui est donnée dans le papyrus traduit par Eisenlohr. On y trouve encore

$$\frac{2}{23} = \frac{1}{12} + \frac{1}{276}.$$

On aurait pu prendre

$$\frac{2}{23} = \frac{1}{20} + \frac{1}{46} + \frac{1}{92} + \frac{1}{230}.$$

Le dénominateur 230 est inférieur à 276, mais, outre que la première décomposition ne contient que deux fractions, toutes deux ont un dénominateur divisible par 3, ce qui permet de multiplier aisément $\frac{2}{23}$ par ce nombre. On trouverait

$$\frac{2}{23} \times 3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{92}.$$

Pour $\frac{2}{99}$, l'auteur égyptien donne la décomposition

$$\frac{2}{99} = \frac{1}{66} + \frac{1}{198},$$

où les deux dénominateurs 66 et 198 sont encore divisibles par 6. Cette décomposition est donc préférable à la décomposition

$$\frac{2}{99} = \frac{1}{90} + \frac{1}{110},$$

qui ne permet pas aussi aisément la multiplication de $\frac{2}{99}$ par 3.

En résumé, *les décompositions de la table du papyrus sont toujours, à un point de vue ou à un autre, plus simples que toute autre décomposition possible.*

M. Gilbert fait part à la section de ses recherches sur un point de la théorie des intégrales définies; ces recherches ont pour but de trouver une fonction de $x$ qui ne tende pas vers 0

quand $x$ tend vers $\infty$, et dont l'intégrale soit néanmoins finie. La représentation géométrique de certaines fonctions semble démontrer que le problème n'est pas insoluble; cependant celles dont M. Gilbert a jusqu'ici achevé l'étude à ce point de vue se trouvent avoir une intégrale infinie. — M. Mansion fait observer que P. Dubois-Raymond a trouvé une fonction du genre de celles que recherche M. Gilbert.

M. Mansion, dans la note suivante, établit d'une façon générale un théorème sur les invariants et les covariants, dont il avait donné antérieurement, dans une revue mathématique anglaise, une démonstration comportant encore une restriction.

### Note de M. P. Mansion

*sur la définition des invariants et covariants.*

1. La définition habituelle d'un invariant (ou covariant), telle qu'on la trouve dans l'ouvrage de Salmon et dans d'autres traités, est la suivante: « On appelle invariant (ou covariant) une fonction F(1) des coefficients (et des variables) d'une ou plusieurs formes algébriques, telle que, si l'on effectue dans ces formes une substitution linéaire, la fonction semblable F(2) des coefficients (et des variables) des formes transformées soit égale à la fonction primitive multipliée par une puissance du module de la transformation. »

M. E.-B. Elliott a remarqué récemment que l'on peut remplacer les derniers mots par les suivants : « multipliée par un facteur T dépendant uniquement des coefficients de la transformation linéaire », et il a montré, dans le cas d'un invariant d'une forme unique, que cette définition plus large équivaut à la première (*Messenger of Mathematics*, nouvelle série, t. XVI, n° 1, mai 1886, pp. 5-8).

Comme nous l'avons fait observer dans le même recueil (*Ibid.*, pp. 127-129, déc. 1886-janv. 1887), avant M. Elliott, M. C. Jordan, dans son *Cours d'analyse* (t. I, pp. 357-358, 1882) avait établi le

même théorème de la même manière, aussi bien pour les covariants que pour les invariants. Cette démonstration s'appuie sur le lemme suivant : « *Un déterminant* $\Delta = (abc \ldots h)$ *à éléments quelconques n'a d'autre diviseur algébrique que lui-même* », lemme qu'il est assez facile de démontrer. Soit, en effet, $\delta$ un diviseur algébrique de $\Delta$ ; il est nécessairement, comme $\Delta$, du premier degré par rapport à toutes les lettres qui y entrent. Posons

$$\Delta = a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 + \cdots + h_1 H_1, \quad \delta = a_1 \alpha_1 + b_1 \beta_1 + c_1 \gamma_1 + \cdots + h_1 \eta_1,$$

Le quotient $q$ de $\Delta$ par $\delta$ sera égal à $(A_1 : \alpha_1)$, qui doit être un nombre ou un polynôme entier égal aussi à $(B_1 : \beta_1)$, $(C_1 : \gamma_1)$, ..., $(H_1 : \eta_1)$. Puisque $q = (A_1 : \alpha_1)$, il ne contient aucune des lettres qui manquent dans $A_1$, c'est-à-dire aucun des $a$ (ni aucune des lettres affectées de l'indice 1) ; pour des raisons analogues, il ne contient aucun des $b_1$, aucun des $c$, ..., aucun des $h$ : donc $q$ est numérique.

II. Dans notre article du *Messenger*, nous avons été plus loin dans la voie indiquée ci-dessus, en essayant de démontrer le théorème suivant, admis implicitement en maints endroits du traité de Salmon et dans les écrits d'autres invariantologistes : [illegible] $F(1) = 0$, $F(2) = 0$, $F(1)$ [illegible] dit, on a identiquement $F(2) = T F(1)$, $T$ ne dépendant que des coefficients [illegible] La démonstration [illegible] dans le Messenger [illegible] $F(1)$ [illegible] par rapport aux [illegible] applicable à [illegible]

[illegible] $F(2) = T F(1)$ [illegible] $T$ [illegible] indépendant des [illegible] $F(1)$ [illegible] $F(2)$ [illegible] par le [illegible] des lettres [illegible] $F(1)$ [illegible] $F(2)$. Dès [illegible] invariant [illegible]



2° Soient, s'il est possible, F (1) et F (2) toujours simultanément nuls, sans que l'on ait F (2) = T. F (1). Posons

$$F(1) = f(1)^p \varphi(1)^q \psi(1)^r \ldots,$$

$f(1)$, $\varphi(1)$, $\psi(1)$, ... étant les facteurs premiers de F (1). On aura, de même,

$$F(2) = f(2)^p \varphi(2)^q \psi(2)^r \ldots$$

Quand $f(1) = 0$, on ne peut pas avoir $\varphi(1) = 0$ ou $\psi(1) = 0$, en laissant dans ces fonctions toutes les lettres arbitraires, sauf une ; car, si l'on avait, par exemple, à la fois, $f(1) = 0$, $\varphi(1) = 0$, d'après la théorie du plus grand commun diviseur, $f(1)$, $\varphi(1)$, auraient un facteur commun. De même, on ne peut avoir simultanément $f(2) = 0$, $\varphi(2) = 0$, $\psi(2) = 0$, dans la même hypothèse.

Supposons maintenant $f(1) = 0$. Je dis que $f(2) = 0$. En effet, $f(1) = 0$ entraine $F(1) = 0$ et, par suite, $F(2) = 0$, c'est-à-dire $f(2) = 0$, ou $\varphi(2) = 0$, ou $\psi(2) = 0$. Si l'on avait $\varphi(2) = 0$, cette relation subsisterait quelle que fût la transformation ; donc, en particulier, dans le cas où les variables seraient simplement multipliées par une même constante $k$. Mais alors $\varphi(2) = k^r \varphi(1)$. On aurait donc simultanément $k^r \varphi(1) = 0$ ou $\varphi(1) = 0$, et $f(1) = 0$, ce qui est impossible. On doit donc admettre que $f(2) = 0$, $f(1) = 0$ simultanément.

Exprimons $f(2)$ au moyen des variables et des coefficients primitifs et posons $f(2) = \chi(1)$. Les fonctions premières $\chi(1)$, $f(1)$, de même degré, s'annulent en même temps ; elle ne diffèrent donc que par une constante. Il en est de même de $\varphi(2)$, $\varphi(1)$, de $\psi(2)$, $\psi(1)$ ; donc enfin, de F(2) et F(1), ce qui démontre le théorème.

*Jeudi, 26 janvier 1888.* — M. Gilbert expose la suite de ses recherches sur un point de la théorie des intégrales définies. (Le travail de M. Gilbert a été publié dans le *Bulletin des sciences mathématiques* de Darboux, 2ᵉ série, t. XII, 1ʳᵉ partie, mars 1888, pp. 66-76.)

M. Pasquier fait l'historique du *Canon des Éclipses* d'Oppolzer.

M. Mansion présente un travail de M. l'abbé B.-I. Clasen sur les équations du premier degré et en fait en même temps l'analyse.

### *Rapport de M. P. Mansion*

sur le mémoire de M. l'abbé B.-I. Clasen : *Sur une nouvelle méthode de résolution des équations linéaires et sur l'application de cette méthode au calcul des déterminants.*

**1.** *Objet de ce mémoire.* Les diverses méthodes élémentaires de résolution des équations linéaires exposées dans les traités d'algèbre (méthodes par comparaison, par substitution et par addition et soustraction) ne diffèrent pas, au fond, l'une de l'autre et présentent toutes les mêmes inconvénients. Du moment que l'on considère plus de deux équations, elles introduisent nécessairement, dans les équations auxiliaires qui conduisent aux valeurs des inconnues, des facteurs communs à tous les coefficients de celles-ci. A cause de cette circonstance, au point de vue pratique, les calculs numériques sont plus pénibles qu'ils ne devraient l'être et, au point de vue théorique, il est difficile d'arriver, par cette voie, aux formules générales donnant les valeurs des inconnues.

La théorie des déterminants (ou la méthode équivalente des multiplicateurs de Bezout) conduit à ces formules générales ; mais, en pratique, elles sont presque stériles, tant il est fastidieux de calculer un déterminant de plus de 25 éléments au moyen de ses mineurs, des mineurs de ses mineurs, et ainsi de suite. En outre, cette méthode de résolution, où les calculs ne sont pas visibles, exige des calculs spéciaux pour la vérification des valeurs des inconnues, d'autres calculs encore pour traiter les cas d'indétermination et d'incompatibilité.

La méthode nouvelle de M. l'abbé Clasen est, au point de vue théorique, aussi élémentaire que celles dont nous parlions plus haut, et conduit à des calculs moins pénibles pour deux raisons :

d'abord, elle signale et fait disparaître les facteurs communs aux divers coefficients des équations auxiliaires aussitôt qu'ils se présentent; ensuite, elle diminue de plus d'un cinquième le nombre des opérations numériques, grâce à l'existence de certains coefficients égaux dans les équations auxiliaires.

Au point de vue théorique, elle conduit d'une manière progressive, dans leur ordre naturel, à tous les résultats que donne l'emploi direct des déterminants, et cela par des calculs réversibles, qui rendent inutile toute vérification des valeurs trouvées et permettent de traiter immédiatement les cas où il y a indétermination ou incompatibilité.

Par contre-coup, la *méthode des coefficients égaux* (comme il nous semble qu'on pourrait l'appeler) conduit à un procédé nouveau de calcul numérique des déterminants, beaucoup plus expéditif que le procédé ordinaire.

L'auteur expose la méthode nouvelle sous une forme élémentaire, en partant d'idées analogues à celles qui sont la base de la méthode des coefficients indéterminés. Il en déduit les formules générales qui donnent les valeurs des inconnues, puis il montre que l'on retrouve ainsi les résultats auxquels conduit la théorie des déterminants. Enfin, s'appuyant sur cette dernière théorie, il établit d'une seconde manière les fondements de sa méthode.

Dans notre analyse de son travail, nous emploierons uniquement la théorie des déterminants, qui nous est plus familière et qui permet une exposition plus rapide, sinon plus claire, de la *méthode des coefficients égaux*.

**2.** *Exposition générale de la méthode des coefficients égaux.*

*Premier groupe d'équations.* Considérons, pour abréger, seulement cinq équations

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1u + e_1v = f_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_1)$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2u + e_2v = f_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_2)$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3u + e_3v = f_3, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_3)$$
$$a_4x + b_4y + c_4z + d_4u + e_4v = f_4, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_4)$$
$$a_5x + b_5y + c_5z + d_5u + e_5v = f_5, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_5)$$

*Second groupe.* Éliminons $x$ entre les deux premières équations en formant la combinaison $-a_2(1_1)+a_1(1_2)$. Nous trouverons, en employant, pour désigner les déterminants, ici et dans la suite, une notation abrégée qui s'explique d'elle-même,

$$(ab)\,y + (ac)\,z + (ad)\,u + (ae)\,v = (af) \quad . \quad . \quad . \quad (2_2)$$

Éliminons ensuite $y$ entre $(1_1)$ et $(2_2)$, en formant la combinaison $-(ab)(1_1)+b_1(2_2)$.

Il vient

$$-a_1(ab)\,x + [b_1(ac) - c_1(ab)]\,z + [b_1(ad) - d_1(ab)]\,u$$
$$+ [b_1(ae) - e_1(ab)]\,v = b_1(af) - f_1(ab).$$

Mais on a

$$b_1(ac) - c_1(ab) = b_1(a_1c_2 - a_2c_1) - c_1(a_1b_2 - a_2b_1)$$
$$= a_1(b_1c_2 - b_2c_1) = a_1(bc)$$

et de même pour les coefficients de $u, v$ et le terme tout connu de la dernière équation. Donc, en divisant celle-ci par $a_1$, elle devient

$$-(ab)\,x + (bc)\,z + (bd)\,u + (be)\,v = (bf) \quad . \quad . \quad . \quad (2_1)$$

Il est clair que l'on peut aussi déduire directement cette relation de $(1_1)$, $(1_2)$, comme on l'a fait pour $(2_2)$.

*Troisième groupe.* Rapprochons maintenant les équations $(2_1)$, $(2_2)$, $(1_3)$ :

$$-(ab)x \qquad + (bc)z + (bd)u + (bc)v = (bf), \quad . \quad . \quad (2_1)$$
$$(ab)y + (ac)z + (ad)u + (ae)v = (af), \quad . \quad . \quad (2_2)$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3u + e_3v = f_3 \quad . \quad . \quad . \quad (1_3)$$

Multiplions la première par $a_3$, la deuxième par $-b_3$, la troisième par $(ab)$ et ajoutons ; il viendra

$$(abc)\,z + (abd)\,u + (abe)\,v = (abf) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3_3)$$

comme on le trouverait, par la théorie des déterminants, en éliminant $x$, $y$ entre $(1_1)$, $(1_2)$, $(1_3)$.

Éliminons $z$ entre $(2_2)$ et $(3_3)$, en formant la combinaison $(abc)(2_2)-(ac)(3_3)$. L'équation résultante en $y$, $u$, $v$ sera

$$\left.\begin{array}{r}(abc)(ab)y+[(ad)(abc)-(ac)(abd)]u+\\ [(ae)(abc)-(ac)(abe)]v=(af)(abc)-(ac)(abf).\end{array}\right\}\quad (A)$$

Calculons le coefficient de $u$. Nous avons, d'après les principes élémentaires de la théorie des déterminants,

$$(ad)(abc)-(ac)(abd)=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & 0 & 0 & c_1 \\ a_2 & d_2 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & d_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & d_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & -a_1 & -b_1 & 0 \\ a_2 & 0 & -a_2 & -b_2 & 0 \\ 0 & d_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & d_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & -b_1 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & -b_2 & 0 \\ 0 & d_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & d_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-(ab)(acd).$$

On trouve de même

$$(ae)(abc)-(ac)(abe)=-(ab)(ace),$$
$$(af)(abc)-(ac)(abf)=-(ab)(acf).$$

L'équation (A) devient donc, en divisant par $-(ab)$,

$$-(abc)\,y+(acd)\,u+(ace)\,v=(acf). \quad . \quad . \quad . \quad (3_2)$$

En éliminant $z$ entre $(2_1)$ et $(3_3)$, nous obtiendrons

$$\begin{array}{l}-(ab)(abc)\,x+u[(bd)(abc)-(bc)(abd)]\\ \qquad +v[(be)(abc)-(bc)(abe)]=(bf)(abc)-(bc)(abf).\end{array}$$

On trouvera, comme plus haut, que les coefficients de $u$ et $v$, et le second membre de cette équation, se réduisent respectivement à

$$-(ab)(bcd),\quad -(ab)(bce),\quad -(ab)(bcf).$$

En divisant par $(ab)$ elle devient donc

$$(abc)\,x + (bcd)\,u + (bce)\,v = (bcf). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3_1)$$

Cette équation ne diffère de $(3_2)$ que par l'échange des lettres $a$ et $b$, $x$ et $y$, et évidemment, au point de vue théorique, elle peut s'en déduire sans nouveau calcul.

*Quatrième groupe.* Rapprochons maintenant de cette équation $(3_2)$, $(3_3)$ et $(1_4)$. Nous aurons le système

$$\begin{array}{llr}
(abc)x & + (bcd)u + (bce)v = (bcf), & . \; . \; (3_1) \\
\quad -(abc)\,y & + (acd)\,u + (ace)\,v = (acf), & . \; . \; (3_2) \\
& (abc)z + (abd)\,u + (abe)\,v = (abf), & . \; . \; (3_3) \\
a_4 x & + b_4 y + c_4 z + d_4 u + e_4 v = f_4. & . \; . \; . \; . \; . \; (1_4)
\end{array}$$

Ajoutons ces équations multipliées respectivement par $-a_4$, $b_4$, $-c_4$, $(abc)$; nous trouverons

$$(abcd)\,u + (abce)\,v = (abcf). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4_4)$$

Éliminons $u$ entre cette équation et $(3_3)$. Il viendra

$$(abc)(abcd)z + v\big[(abe)(abcd) - (abd)(abce)\big] = (abf)(abcd) - (abd)(abcf). \quad (B)$$

Le coefficient de $v$ peut s'écrire $-(abc)\,(abde)$ (*). On trouve de même, pour le terme tout connu de (B), $-(abc)\,(abdf)$. Cette équation devient donc, après division par $-(abc)$,

$$-(abcd)\,z + (abde)\,v = (abdf). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4_3)$$

On trouve ensuite, par des calculs analogues, ou en remplaçant $c$ par $b$ ou $a$, $z$ par $y$ ou $x$, et inversement,

$$(abcd)\,y + (acde)\,v = (acdf), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4_2)$$

$$-(abcd)x + (bcde)\,v = (bcdf). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4_1)$$

---

(*) L'auteur prouve, d'une manière simple et générale, que l'on a l'égalité

$$(abc \ldots gkl) = \frac{(abc \ldots gk)(abc \ldots ghl) - (abc \ldots gl)(abc \ldots ghk)}{(abc \ldots gh)} \quad . \quad . \quad . \quad (L)$$

*Cinquième groupe.* Multiplions maintenant $(4_1)$, $(4_2)$, $(4_3)$, $(4_4)$, $(1_5)$, respectivement par $a_5$, $-b_5$, $c_5$, $-d_5$, $(abcd)$ et ajoutons. Il viendra

$$(abcde)v = (abcdf) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5_5)$$

En éliminant $v$ entre celle-ci et $(4_4)$, on trouve d'abord

$$u\,(abcd)\,(abcde) = (abcf)\,(abcde) - (abce)\,(abcdf).$$

Le second membre est égal à $-(abcd)\,(abcef)$, et, par suite, on a

$$-u\,(abcde) = (abcef). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5_4)$$

On trouve de même

$$z\,(abcde) = (abdef), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5_3)$$
$$-y\,(abcde) = (acdef), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5_2)$$
$$x\,(abcde) = (bcdef). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5_1)$$

*Vérification des valeurs trouvées.* Les calculs que nous venons d'exposer peuvent être tous effectués en sens inverse, de manière que des équations $(5_1)$, $(5_2)$, $(5_3)$, $(5_4)$, $(5_5)$ on peut déduire les relations $(1_1)$, $(1_2)$, $(1_3)$, $(1_4)$, $(1_5)$. Les systèmes $(1)$ et $(5)$ sont donc équivalents et il n'y a pas besoin, comme dans la méthode de résolution par les déterminants, de vérifier, par un calcul nouveau, les valeurs données par les équations $(5)$, en les substituant dans les équations $(1)$.

**3.** *Cas d'indétermination et d'incompatibilité.* Dans ce qui précède nous avons laissé de côté les cas où les divisions indiquées seraient impossibles parce que les diviseurs seraient nuls. Quand cela arrive, les équations données sont incompatibles ou indéterminées, comme on va le voir ; la méthode des coefficients égaux permet de traiter ces cas avec la plus grande facilité et d'une manière plus naturelle que celle qui repose exclusivement sur l'emploi des déterminants.

1° On peut toujours supposer différent de zéro l'un des coefficients des inconnues dans $(1_1)$, $a_1$ par exemple. Les opérations qui donnent les équations $(2_1)$, $(2_2)$ sont donc toujours possibles.

On déduit alors aisément de l'équation $(2_2)$, qui peut s'écrire

$$-a_2\,(1_1) + a_1\,(1_2) = 0,$$

que *si* $(ab)=0$, $(ac)=0$, $(ad)=0$, $(ae)=0$, $(1_2)$ *est compatible avec* $(1_1)$ *seulement dans le cas où l'on a aussi* $(af)=0$. Si les équations sont compatibles, $x$ s'exprime au moyen de $z, u, v$, qui sont arbitraires. On trouve de même les conditions nécessaires et suffisantes pour que $(1_3)$, $(1_4)$, $(1_5)$, soient compatibles avec $(1_1)$.

2° Si l'un des coefficients des inconnues dans $(2_2)$ est différent de zéro, $(ab)$ par exemple, les calculs qui donnent $(3_1)$, $(3_2)$, $(3_3)$ sont possibles.

On déduit ensuite de la considération de l'équation $(3_3)$, ou

$$a_3(2_1) - b_3(2_2) + (ab)(1_3) = 0,$$

que *si* $(abc)=0$, $(abd)=0$, $(abe)=0$, $(1_3)$ *est compatible avec* $(2_1)$, $(2_2)$, *ou avec le système équivalent* $(1_1)$, $(1_2)$, *seulement dans le cas où l'on a aussi* $(abf)=0$. Dans ce cas, d'ailleurs, $x$ et $y$ s'expriment au moyen de $z$, $u$, $v$, qui restent arbitraires. On trouve de même les conditions nécessaires et suffisantes pour que $(1_4)$ ou $(1_5)$ soit compatible avec $(1_1)$ et $(1_2)$.

3° Si, dans $(3_3)$, l'un des coefficients des inconnues, $(abc)$ par exemple, est différent de zéro, les calculs qui donnent $(4_1)$, $(4_2)$, $(4_3)$, $(4_4)$ sont possibles.

On déduit ensuite de la considération de l'équation $(4_4)$ que *si* $(abcd)=0$, $(abce)=0$, $(1_4)$ *est compatible avec* $(1_1)$, $(1_2)$, $(1_3)$, *seulement dans le cas où l'on a aussi* $(abcf)=0$. Dans ce cas, d'ailleurs, $x$, $y$, $z$ s'expriment au moyen de $u$ et $v$ qui restent arbitraires. On trouve de même la condition de compatibilité de $(1_5)$ avec $(1_1)$, $(1_2)$, $(1_3)$.

4° Si, dans $(4_4)$, l'un des coefficients des inconnues, $(abcd)$ par exemple, est différent de zéro, les calculs qui donnent les équations (5) sont possibles.

On déduit encore de la considération de l'équation $(5_5)$ que *si* $(abcde)=0$, $(1_5)$ *est compatible avec* $(1_1)$, $(1_2)$, $(1_3)$, $(1_4)$, *seulement si* $(abcdf)=0$. Dans ce cas, $x$, $y$, $z$, $u$ s'expriment au moyen de $v$ qui est arbitraire.

5° Enfin si $(abcde)$ est différent de zéro, les équations (5) donnent, pour $x$, $y$, $z$, $u$, $v$, des valeurs déterminées.

**4.** *Avantages de la nouvelle méthode.* **1°** *Au point de vue théorique.* D'après ce qui précède, les calculs de la méthode des coefficients égaux sont possibles jusqu'au bout, chaque fois que les équations données forment un système déterminé ; dans le cas contraire, la méthode elle-même, sans aucun calcul nouveau, fournit avec précision les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations soient compatibles et fait connaître le nombre des inconnues qui restent arbitraires.

Dans la méthode habituelle de résolution par les déterminants, la discussion des cas d'indétermination et d'incompatibilité se fait, comme on le sait, au moyen de calculs spéciaux, distincts de ceux qui conduisent aux valeurs des inconnues: on est forcé de chercher successivement les équations $(5_5)$, $(4_4)$, $(3_3)$, $(2_2)$, pour faire cette discussion.

**2°** *Au point de vue pratique.* La méthode par addition et soustraction pour résoudre $n$ équations à $n$ inconnues comporte, comme le montre l'auteur, $\frac{1}{6}n(n-1)(5n+11)$ multiplications ; la nouvelle, $\frac{1}{3}(n-1)(n+1)(n+2)$, nombre dont le rapport au précédent est compris entre $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$, si $n$ surpasse 2. La nouvelle méthode (tout comme la méthode par addition et soustraction, quand on veut la simplifier autant que possible) entraîne un grand nombre de divisions, mais *ce sont des divisions qui doivent toujours se faire exactement* et qui, comme telles, constituent l'un des plus sérieux avantages de cette méthode, parce qu'elles sont un élément de contrôle perpétuel pour le calculateur. Si, en effet, ces divisions se font sans reste, il est extrêmement probable qu'il n'y a pas d'erreur dans les calculs ; si le contraire arrive, le calculateur sait qu'il a commis une erreur et où il l'a commise.

Enfin, la méthode des coefficients égaux conduit à un mode nouveau de calcul des déterminants, comme nous allons le montrer sur un exemple.

**5.** *Nouveau procédé de calcul d'un déterminant.* Soit à calculer le déterminant à six lignes $(abcdef)$.

I. On formera directement les neuf déterminants à deux lignes

$$(ab), (ac), (ad), (ae), (af); \quad (bc), (bd), (be), (bf).$$

Si les cinq premiers ont des valeurs numériques faibles, on peut aussi former les quatre derniers par le théorème (L) de la note du n° 2, au moyen des formules

$$(bc) = \frac{b_1(ac) - c_1(ab)}{a_1}, \quad (bd) = \frac{b_1(ad) - d_1(ab)}{a_1},$$

$$(be) = \frac{b_1(ae) - e_1(ab)}{a_1}, \quad (bf) = \frac{b_1(af) - f_1(ab)}{a_1}.$$

II. On déduit de là, par le procédé habituel,

$$(abc) = a_3(bc) - b_3(ac) + c_3(ab), \quad (abd), \quad (abe), \quad (abf);$$

puis, par (L), $(acd)$, $(ace)$, $(acf)$, $(bcd)$, $(bce)$, $(bcf)$; ainsi

$$(acd) = \frac{(ac)(abd) - (ad)(abc)}{(ab)}, \quad (bcd) = \frac{(bc)(abd) - (bd)(abc)}{(ab)}$$

III. Le procédé habituel donne ensuite $(abcd)$, $(abce)$, $(abcf)$; le théorème (L) permet de trouver $(abde)$ et $(abdf)$, $(acde)$ et $(acdf)$, $(bcde)$ et $(bcdf)$. Ainsi

$$(abde) = \frac{(abd)(abce) - (abe)(abcd)}{(abc)},$$

$$(acde) = \frac{(acd)(abce) - (ace)(abcd)}{(abc)},$$

$$(bcde) = \frac{(bce)(abce) - (bce)(abcd)}{(abc)}.$$

IV. On trouve $(abcde)$, $(abcdf)$ par le procédé habituel, et $(abcef)$, $(abdef)$, $(acdef)$, $(bcdef)$, par (L).

V. Enfin $(abcdef)$ s'obtient par l'addition de ces six mineurs multipliés respectivement par $f_6$, $-e_6$, $d_6$, $-c_6$, $b_6$, $-a_6$.

Dans le cas d'un déterminant d'ordre $(n+1) = N$, le nombre total des multiplications est (n° 4) $\frac{N(N-2)(N+1)}{2} + N = \frac{1}{2} N^2 (N-1)$, considérablement inférieur à celui que donne la méthode habituelle.

En pratique, pour calculer un déterminant par la méthode qui vient d'être exposée, le procédé le plus facile consistera à opérer comme si l'on avait à résoudre un système de N équations linéaires homogènes, par la méthode des coefficients égaux.

Comme on le voit par cette longue analyse, M. l'abbé Clasen est parvenu à compléter une théorie fondamentale de l'algèbre élémentaire sur laquelle il semblait qu'il n'y eût plus rien à dire après les travaux de M. Rouché. Nous proposons donc à la section de voter l'impression de son travail dans nos *Annales* et d'adresser des remerciements à l'auteur.

M. Gilbert fait rapport sur le travail de M. A. Baule intitulé : « Le gyroscope collimateur de M. Fleuriais ». Sur sa proposition, la section vote l'impression de ce travail dans les *Annales*. (Voir 2e partie, pp 121 et suiv.)

Sur le rapport de M. Gilbert, la section décide l'insertion aux *Annales* de la troisième partie d'un travail de M. le Cte de Sparre sur les fonctions elliptiques. (Voir 2e partie, pp. 1 et suiv.)

M. Gilbert expose un travail sur le rapport des deux chaleurs spécifiques dans un corps homogène quelconque. Le R. P. Delsaulx est nommé commissaire pour l'examen de ce travail.

*Mardi, 3 avril 1888.* — Le R. P. Carbonnelle lit : 1° une lettre de M. Baule relative à son travail sur le gyroscope collimateur dont M. Gilbert a entretenu la section à la dernière séance; 2° une lettre de M. le Vte de Salvert annonçant l'envoi d'un *Mémoire sur les équations du mouvement de la chaleur et la*

*recherche générale des surfaces isothermes* (*). La section décide de soumettre ce mémoire à l'appréciation de M. Mansion.

M. Gilbert fait rapport sur deux notes du R. P. Delsaulx : la première est relative à l'application de la théorie dynamique de la chaleur à l'étude de la capillarité. Le rapporteur propose l'insertion de cette note aux *Annales*. (Voir 2e partie, pp. 105 et suiv.)

La seconde note du R. P. Delsaulx est relative à un point de la théorie de l'électricité de Maxwell. (Voir 2e partie, pp. 97 et suiv.) Voici *in extenso* le rapport de M. Gilbert sur ce travail.

### Rapport de M. Gilbert

### sur la note du R. P. Delsaulx : *Sur la tension électrique.*

On doit à Clerk Maxwell un théorème qui, dans sa pensée, devait servir à rendre compte des actions mécaniques des corps électrisés à l'aide de tensions se propageant dans le milieu diélectrique où ils sont plongés, mais qui peut être énoncé indépendamment de cette conception sous la forme que voici :

« L'action mécanique qu'un système électrisé $\Sigma$ exerce sur l'un des corps A du système, est réductible à des actions élémentaires qui s'exerceraient sur les points d'une surface fermée quelconque S enveloppant le seul corps A et liée invariablement avec lui. Pour que ces forces élémentaires soient normales aux éléments de surface qu'elles sollicitent, il faut et il suffit que ces éléments soient normaux aux lignes de force ou tangents à celles-ci, et dans l'un et l'autre cas elles sont égales à $\frac{H}{8\pi}$, H désignant le carré de la force électromotrice. » Clerk Maxwell a

(*) Ce Mémoire forme la première et la deuxième section d'un travail intitulé : *Mémoire sur la recherche la plus générale d'un système orthogonal triplement isotherme ;* la troisième section a été présentée à la séance d'octobre 1888; la quatrième, à la séance d'avril 1889.

démontré cette proposition de deux manières différentes (*). La dernière seule est vraiment mathématique, mais une lacune grave subsiste dans celle-ci : l'auteur anglais considère seulement les forces de *translation* qui agissent sur le corps A', sans se préoccuper du couple résultant qui tend à produire la rotation de ce corps. De plus, cette démonstration est assez compliquée et peu naturelle.

M. Émile Mathieu (**) a complété sur ce point important la démonstration de Clerk Maxwell, sans lui ôter son caractère un peu artificiel; il a fait voir de plus, ce qui est important au point de vue de Maxwell, que ces forces fictives qui existent en chaque point du diélectrique satisfont aux équations qui régissent les pressions intérieures dans un milieu élastique en équilibre.

La démonstration que propose ici le R. P. Delsaulx est très supérieure au point de vue du naturel et de la simplicité. Par une heureuse application de la formule de Green, il met les composantes de l'action totale et de l'axe du couple résultant sous une forme qui montre immédiatement que ces forces peuvent être remplacées par une action superficielle ayant pour composantes rectangulaires

$$(A) \ldots\ldots \begin{cases} \xi = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{dV}{dx}\dfrac{dV}{dn} - \dfrac{1}{8\pi}\,H\cos\lambda, \\[2ex] \eta = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{dV}{dy}\dfrac{dV}{dn} - \dfrac{1}{8\pi}\,H\cos\mu, \\[2ex] \zeta = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{dV}{dz}\dfrac{dV}{dn} - \dfrac{1}{8\pi}\,H\cos\nu. \end{cases}$$

V est le potentiel du système électrisé, $\frac{dV}{dn}$ sa dérivée suivant la normale extérieure à la surface fermée S; $\lambda$, $\mu$, $\nu$ les angles directeurs de cette normale;

$$H = \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2$$

(*) *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 1re édit., p. 121. — *Traité d'électricité et de magnétisme*, trad. par Seligmann-Lui, p. 163.

(**) *Théorie du potentiel*, seconde partie, ch. III, p. 104.

le carré de la force électromotrice R. Le R. P. Delsaulx établit alors les conditions nécessaires pour que la force ($\xi$, $\eta$, $\zeta$) soit normale à la surface et trouve immédiatement les résultats de Maxwell et de M. Mathieu.

Il me semble toutefois que la seconde partie de la démonstration résumée ci-dessus peut encore être simplifiée. Les formules (A), rapprochées des propriétés des résultantes et de la signification connue de $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$, $\frac{dV}{dn}$, montrent en effet, à première vue, que la force fictive ($\xi$, $\eta$, $\zeta$) est la résultante de deux autres : l'une qui a pour expression $\frac{H}{8\pi}$ et est dirigée suivant la normale intérieure à S ; l'autre qui a pour expression $\frac{H}{4\pi}\cos\varphi$, $\varphi$ désignant l'angle de la force R avec la normale extérieure, et qui est toujours dirigée suivant la tangente à la ligne de force, du côté où elle fait un angle aigu avec la normale extérieure. Dès lors, pour que cette résultante soit normale à S, il est visible qu'il faut 1° ou bien que la seconde composante soit aussi normale à S, ce qui exige que l'élément $dS$ soit normal à la ligne de force, et alors $\cos\varphi$ étant égal à $\pm 1$, la force fictive a pour expression $\frac{H}{8\pi}$; 2° ou bien que la seconde composante soit nulle, donc $\cos\varphi = 0$, ce qui montre que l'élément $dS$ est tangent à la ligne de force; la force fictive a encore pour expression $\frac{H}{4\pi}$. On voit aussi clairement, par la décomposition indiquée, que quand la force fictive est normale à la surface de niveau, elle agit vers l'extérieur, c'est une *tension;* quand elle est normale à la ligne de force, elle agit vers l'intérieur de S, c'est une *pression.* On retrouve donc tous les résultats annoncés par Clerk Maxwell.

Toutefois, pour les appliquer à la transmission des forces par le diélectrique, dans le sens où l'entendent Maxwell et M. Mathieu, il serait nécessaire de démontrer encore que ces forces satisfont aux conditions qui régissent les pressions internes, mais je ne crois pas que cela puisse offrir de difficulté.

Je prie la section de voter des remercîments au R. P. Delsaulx et l'insertion de son intéressante note dans les *Annales.*

M. Gilbert communique le résultat de nouvelles recherches faites par lui sur les relations qui existent entre les divers coeffi-

cients calorimétriques ; il est parvenu à obtenir, pour ces coefficients, des expressions générales au moyen desquelles il a pu résoudre plusieurs problèmes très intéressants de la thermodynamique. La section décide que le travail de M. Gilbert sera soumis à l'appréciation du R. P. Delsaulx.

M. Dutordoir expose brièvement le contenu de deux notes envoyées par M. Mansion. Dans la première, qui sera publiée dans le tome suivant des *Annales,* l'auteur montre que l'éliminant de Sylvester de deux équations algébriques est égal, à un facteur constant près, au produit des différences obtenues en soustrayant successivement chacune des racines de l'une des équations de chacune des racines de l'autre. La seconde note traite du calcul approché d'une intégrale définie.

### Note de M. P. Mansion

### *sur le calcul approché d'une intégrale définie.*

On a besoin, en calcul des probabilités, de la valeur de l'intégrale définie

$$I_r = \int_0^r e^{-t^2} dt,$$

non seulement quand $r$ est infini, auquel cas elle est égale $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, mais aussi pour des valeurs assez faibles de $r$, comme 3, 4, 5, 6, ou des valeurs intermédiaires.

La méthode de Poisson (*Mécanique,* 2^e^ édition, n° 512) amendée par Cayley (*Quarterly Journal of Mathematics,* 1872, t. XII, p. 120) permet de trouver, d'une manière élémentaire et rigoureuse, non seulement $I_\infty$, mais aussi $I_r$ à partir de $r = 3$, avec une assez grande approximation.

On trouve aisément

$$I_r^2 = \int_0^r dx \int_0^r dy\, e^{-(x^2+y^2)}.$$

Cette intégrale double est égale au volume compris sous la

surface de révolution $z = e^{-(x^2+y^2)}$ (ayant pour méridien $z = e^{-x^2}$ ou $x^2 = -lz$), et projeté sur le carré $r^2 =$ OACB, dont deux côtés coïncident avec les axes de coordonnées OX et OY.

La partie de ce volume projetée à l'intérieur du quart de cercle OAB est égale, comme on le voit aisément, à

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} e^{-r^2}.$$

Construisons un quart de cercle $a\alpha\beta b$O de rayon R, équivalent au carré, de sorte que

$$\pi R^2 = 4r^2.$$

Les aires ($\mathrm{A}a\alpha + \mathrm{B}b\beta$) et $\alpha\beta$C seront équivalentes. Comme les $z$ de la surface $z = e^{-(x^2+y^2)}$ sont d'autant plus grands que $(x^2 + y^2)$ est plus petit, les $z$ de tous les points de cette surface, projetés sur l'aire ($\mathrm{A}a\alpha + \mathrm{B}b\beta$), sont supérieurs à ceux de ses points projetés sur l'aire $\alpha\beta$C. Par suite, le volume projeté sur le carré est inférieur au volume projeté sur le quart de cercle $a\alpha\beta b$O. Ce dernier est égal, d'après ce qui précède, à

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} e^{-R^2}.$$

On a donc

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} e^{-r^2} < \mathrm{I}_r^2 < \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} e^{-R^2}.$$

On déduit aisément de là, $\mathrm{I}_\infty^2 = \frac{1}{4}\pi$. Mais, en outre, on observera que la différence

$$\frac{\pi}{4}(e^{-r^2} - e^{-R^2})$$

des deux limites entre lesquelles $\mathrm{I}_r^2$ est enfermé est déjà assez petite, même pour $r = 3$. Cette différence est inférieure à

$$\frac{11}{14}(e^{-r^2} - e^{-\frac{4}{3}r^2}),$$



puisque $R^2 = \frac{4}{\pi} r^2$ est inférieur à $\frac{4}{3} r^2$. Or, on a, à peu près, $e^3 = 20$. Donc, approximativement,

$$\frac{11}{14}(e^{-9} - e^{-12}) = \frac{11}{14}\left(\frac{1}{20^3} - \frac{1}{20^4}\right) = \frac{11.19}{14.160000} < \frac{1}{10000}.$$

Pour $r = 3$, l'approximation pour $I_r^2$ et, *a fortiori*, pour $I_r$, serait encore beaucoup plus grande.

Le R. P. Carbonnelle entretient la section d'une propriété remarquable de certains nombres, qui a été signalée récemment dans diverses publications mathématiques.

*Jeudi, 5 avril 1888.* — M. Gilbert communique quelques remarques *Sur les différentes manières de traiter un problème de mécanique.*

1. Un même problème pouvant être abordé par diverses voies, il est utile de se rendre compte des avantages de chacune d'elles par leur application à une question donnée. La suivante conduit d'ailleurs à des résultats dignes d'intérêt :

*Deux points* m *et* $m_1$, *mobiles sans frottement sur deux cercles concentriques, sont soumis à leur action réciproque, fonction donnée de leur distance* u. *Déterminer leur mouvement et la pression qu'ils exercent.*

Soient O le centre commun, $a$ et $a_1$ les rayons des deux cercles, $a_1 > a$; $mm_1 f(u)$ la mesure de l'action réciproque. On pourrait appliquer à chaque point les équations connues du mouvement sur un cercle, ou appliquer au système l'équation de d'Alembert; mais il est visible que l'emploi des coordonnées rectangulaires ne sera pas avantageux, tandis que la question même suggère l'emploi des composantes tangentielle et normale de la force motrice. Suivons cette voie.

Nommons $\theta$, $\theta_1$ les angles respectifs des rayons vecteurs $Om$, $Om_1$ avec l'axe polaire; $\omega$, $\omega_1$ les vitesses angulaires de ces rayons; N, $N_1$ les réactions normales des cercles, $\varphi$ l'angle $\theta_1 - \theta$.

N n'a pas de composante tangentielle; celle de l'action de

$m_1$ sur $m$ est $mm_1 f(u) \cos \overline{uv}$, $\overline{uv}$ étant l'angle de $mm_1$ avec la vitesse $v$, *prise dans le sens où* $\theta$ *croît*. Le triangle $mOm_1$ donne la relation

$$\frac{u}{\sin\varphi} = \frac{a_1}{\cos\overline{uv}};$$

donc

$$mm_1 a_1 \frac{f(u)}{u} \sin\varphi$$

donne, en grandeur et en signe, la composante tangentielle de la force totale qui sollicite le mobile $m$, qui est égale, comme on sait, à

$$m\frac{dv}{dt} = ma\frac{d\omega}{dt},$$

$\omega$ étant positif ou négatif selon que $\theta$ croît ou décroît.

En raisonnant de même pour $m_1$, sauf que la direction $u$ est ici en sens opposé, on a les égalités

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} a\frac{d\omega}{dt} &= \frac{m_1 a_1 f(u)}{u}\sin\varphi, \\ a_1\frac{d\omega_1}{dt} &= -\frac{maf(u)}{u}\sin\varphi. \end{aligned} \right.$$

Pour l'action normale sur $m$, on a, d'une part,

$$N = mm_1 f(u)\cos\overline{ua};$$

de l'autre,

$$\frac{mv^2}{a} = ma\omega^2;$$

le triangle $mOm_1$ donne

$$a + u\cos\overline{ua} = a_1\cos\varphi;$$

donc, substituant et opérant de même pour $m_1$, on trouve

$$(2) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} ma\omega^2 &= N + \frac{mm_1 f(u)}{u}(a - a_1\cos\varphi), \\ m_1 a_1 \omega_1^2 &= N_1 + \frac{mm_1 f(u)}{u}(a_1 - a\cos\varphi). \end{aligned} \right.$$

2. Ces équations donnent, d'une façon commode, la solution du problème. On tire des formules (1) :

$$ma^2\frac{d\omega}{dt} + m_1a_1^2\frac{d\omega_1}{dt} = 0,$$

d'où, $k$ étant une constante,

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad ma^2\omega + m_1a_1^2\omega_1 = k,$$

d'où, intégrant de nouveau et désignant par $\alpha$ une constante,

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad ma^2\theta + m_1a_1^2\theta_1 = kt + \alpha,$$

relation finie entre $\theta$ et $\theta_1$. D'autre part, on a par les équations (1) :

$$\frac{d(\omega_1 - \omega)}{dt} = -\left(\frac{ma}{a_1} + \frac{m_1a_1}{a}\right)\frac{f(u)}{u}\sin\varphi = -\frac{G}{aa_1}\frac{f(u)}{u}\sin\varphi,$$

G désignant le moment d'inertie $ma^2 + m_1a_1{}^2$ du système par rapport au point O. Cette équation peut évidemment s'écrire

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{G}{aa_1}\frac{f(u)}{u}\sin\varphi.$$

Multiplions par $2\frac{d\varphi}{dt}$, observons que l'on a

$$u^2 = a^2 + a_1^2 - 2aa_1\cos\varphi, \qquad udu = aa_1\sin\varphi\, d\varphi,$$

et intégrons; il viendra

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = C - \frac{2G}{a^2a_1^2}F(u),$$

G étant une constante et $F(u)$ l'intégrale $\int f(u)du$. On aura donc, par simple quadrature, en mettant pour $u$ sa valeur,

$$(6) \quad . \; t = C_1 \pm \int \frac{d\varphi}{\sqrt{C - \frac{2G}{a^2a_1^2}F\left(\sqrt{a^2 + a_1^2 - 2aa_1\cos\varphi}\right)}}$$

On déduira de là $\varphi$ en fonction de $t$; combinant l'équation $\theta_1 - \theta = \varphi$ avec (4), on aura

$$G\theta + m_1 a_1^2 \varphi = kt + \alpha,$$

d'où

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \theta = \dfrac{kt + \alpha}{G} - \dfrac{m_1 a_1^2 \varphi}{G}, \\[2ex] \theta_1 = \dfrac{kt + \alpha}{G} + \dfrac{ma^2 \varphi}{G}, \end{cases}$$

ce qui donne la solution complète du mouvement. Les réactions $N, N_1$ sont alors fournies par les équations (2).

3. Avant d'examiner les conséquences, voyons ce que donneraient les autres méthodes. On emploie souvent le théorème des forces vives et celui des aires; tous deux sont applicables ici. En effet, le travail élémentaire des réactions $N$ et $N_1$ est nul, celui des actions réciproques est $-mm_1 f(u)\,du$; la force vive du système a pour expression $ma^2\omega^2 + m_1 a_1^2\omega_1^2$; on a donc, en écrivant et intégrant l'équation des forces vives,

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad ma^2\omega^2 + m_1 a_1^2 \omega_1^2 = C' - 2mm_1 F(u),$$

$C'$ étant constant. On ne voit pas que cette intégrale, contrairement à ce qui arrive généralement, puisse être ici bien utile; elle renferme les carrés de $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\theta_1}{dt}$.

Quant au théorème des aires, il est applicable autour du point O, car les forces *extérieures* $N$ et $N_1$ donnent un moment nul. On a donc immédiatement, par le théorème des aires,

$$ma^2 \frac{d\theta}{dt} + m_1 a_1^2 \frac{d\theta_1}{dt} = k,$$

et l'on retrouve l'équation (4), si importante dans notre solution.

Ni le théorème des aires, ni celui des forces vives ne nous donnent rien touchant $N$ et $N_1$, mais la combinaison du second avec les équations (2) conduit à un résultat intéressant. Ajoutons les équations (2) respectivement multipliées par $a$ et $a_1$, ayons

égard à la valeur de $u^2$ ci-dessus et à l'expression de la force vive ; nous aurons

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Sigma m v^2 = Na + N_1 a_1 + m m_1 u f(u).$$

Cette équation remarquable est d'ailleurs donnée immédiatement par le théorème de Villarceau,

$$\Sigma m v^2 = -\Sigma Pr \cos \overline{Pr} + S m m_1 u f(u).$$

Le S disparait, puisqu'il y a un seul couple de points; les forces extérieures se réduisant à N, $N_1$, on a

$$\Sigma Pr \cos \overline{Pr} = -Na - N_1 a_1,$$

et on tombe sur la relation (9). Ce théorème est donc fort utile dans notre problème, car (8) et (9) conduisent à la relation curieuse entre les réactions N et $N_1$,

$$(10) \quad . \quad . \quad Na + N_1 a_1 = C' - m m_1 [2\,F(u) + u f(u)].$$

4. Il nous reste à éprouver une autre voie, souvent favorable, celle des équations de Lagrange,

$$(11) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'} - \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial q};$$

T est la demi-force vive, U la fonction des forces, $q$ une des variables qui fixent la position du système, $q'$ sa dérivée par rapport à $t$. On a ici

$$q = \theta, \theta_1; \quad T = \tfrac{1}{2}(m a^2 \theta'^2 + m_1 a_1^2 \theta_1'^2), \quad U = -m m_1 F(u),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = m a^2 \theta', \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = -m m_1 f(u) \frac{\partial u}{\partial \theta};$$

et comme

$$u^2 = a^2 + a_1^2 - 2 a a_1 \cos(\theta_1 - \theta), \quad u \frac{\partial u}{\partial \theta} = -a a_1 \sin(\theta_1 - \theta),$$

on a de suite, par (11),

$$a\frac{d\theta'}{dt}=\frac{m_1a_1f(u)}{u}\sin\varphi,$$

et de même

$$a_1\frac{d\theta'_1}{dt}=-\frac{maf(u)}{u}\sin\varphi.$$

Ainsi *les équations de Lagrange conduisent tout droit aux équations* (1), *les plus commodes pour la solution du problème,* quant au mouvement. Elles ne nous apprennent rien sur les pressions N.

5. Examinons quelques cas simples. Supposons l'attraction proportionnelle à la distance, $f(u)=\mu u$; ce serait à peu près le cas où les points seraient réunis par un fil élastique de masse négligeable. Nous aurons

$$F(u)=\frac{\mu u^2}{2},\quad \frac{d\varphi^2}{dt^2}=C-\frac{\mu G}{a^2a_1^2}u^2,$$

et si $u_0$ désigne la valeur de $u$ qui répond à un maximum ou à un minimum $\varphi_0$ de l'angle $\varphi$, en déterminant C,

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2}=\frac{\mu G}{a^2a_1^2}\left(u_0^2-u^2\right)=\frac{2\mu G}{aa_1}\left(\cos\varphi-\cos\varphi_0\right).$$

C'est l'équation du mouvement d'un pendule simple de longueur

$$l=\frac{gaa_1}{\mu G}.$$

Ainsi *le rayon* $Om_1$ *mené du centre* O *au mobile* $m_1$ *a, par rapport au rayon* Om, *le même mouvement oscillatoire qu'un pendule simple de longueur* l *par rapport à la verticale.* On saura donc exprimer l'angle $\varphi$ au moyen des fonctions elliptiques, et les formules (7) donneront alors $\theta$ et $\theta_1$. On voit que, par exemple, *le mouvement du rayon* Om *autour du centre commun se com-*

*posera : 1° d'un mouvement angulaire uniforme avec la vitesse* $\frac{k}{G}$; *2° d'un mouvement périodique dont la loi est la même que celle du pendule.* Le mouvement du système est aussi bien connu qu'on peut le désirer.

Si l'action réciproque était répulsive, le mouvement relatif serait encore pendulaire, mais *par rapport au prolongement de* Om. Dans le cas de l'attraction newtonienne, on trouve

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{2G\mu}{a^2 a_1^2}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u_0}\right).$$

Pour les réactions N, $N_1$, l'équation (10) conduit à des conséquences assez curieuses. Dans l'hypothèse $f(u) = \mu u$, on a

$$2\,F(u) + u\,f(u) = 2\mu u^2,$$

donc

$$Na + N_1 a_1 = C' - 2\mu m m_1 u^2.$$

La somme $(Na + N_1 a_1)$ varie comme le carré de la distance. Posons

$$2\,F(u) + u\,f(u) = 0, \quad \text{ou} \quad 2\,F(u) + u\,\frac{dF}{du} = 0,$$

nous aurons

$$l.F(u) + l.u^2 = l.C_1, \quad F(u) = \frac{C_1}{u^2}, \quad f(u) = -\frac{2C_1}{u^3};$$

donc, *si l'action réciproque est en raison inverse du cube de la distance, la quantité* $Na + N_1 a_1$ *restera constante pendant toute la durée du mouvement.*

M. Goedseels formule une objection à la définition de la limite, appliquée à celle de la dérivée dans le cas où l'accroissement de la variable s'annulerait une infinité de fois.

La section procède ensuite au renouvellement de son bureau; sont élus :

*Président*, MM. l'abbé E. Gelin.
*Vice-Présidents*, de Jonquières et E. Suttor.
*Secrétaire*, H. Dutordoir.

### Deuxième section.

—

*Jeudi, 27 octobre 1887.* — M. Thibaut expose le résultat des études qu'il a entreprises sur la construction rationnelle des ventilateurs.

Le R. P. Van Tricht appelle l'attention de la section sur un coup de foudre qui a atteint la tour de la cathédrale d'Anvers et qui semble montrer que la règle de Gay-Lussac pour la détermination du rayon de protection d'un paratonnerre n'est pas applicable dans tous les cas.

M. Van Biervliet fait connaître à la section un procédé qui facilite la détermination du temps de pose nécessaire en photographie. On découpe dans une feuille de papier blanc une série de bandes de même largeur, mais de longueurs régulièrement croissantes; si l'on superpose toutes ces bandes de façon à les mettre en contact par une de leurs extrémités, on trouvera à l'autre extrémité des épaisseurs successives de 1, 2, 3.... bandes. Appliquons cette pile ainsi formée sur une feuille de papier sensibilisé, à la manière d'un cliché, et exposons à la lumière: au bout d'un certain temps ce papier aura changé de couleur là où il n'était recouvert que d'une seule épaisseur de papier; si l'on continue l'exposition, on trouvera successivement 2, 3... $n$ teintes. Il est clair que le nombre de teintes obtenues dans un temps donné, ou le temps nécessaire pour obtenir un nombre donné de teintes, donneront une mesure de l'intensité photogénique de la lumière. D'ailleurs le rapport $\frac{\tau}{\tau'}$ des temps nécessaires pour produire $n$ teintes avec les intensités I et I' sera sensiblement égal au rapport $\frac{T}{T'}$ des temps nécessaires pour impressionner une glace sensible avec les mêmes intensités; dès lors on voit qu'il suffira d'avoir déterminé une fois pour toutes le temps T correspondant à l'intensité I (caractérisé par l'obtention de $n$ teintes dans le temps $\tau$) pour pouvoir déterminer le temps T' correspondant à une intensité I' quelconque.

*Jeudi, 26 janvier 1888.* — Le R. P. Hahn fait connaître un procédé expérimental qui semble propre à faciliter la pratique des analyses par les liqueurs titrées :

Dans l'analyse par les liqueurs titrées, les débutants surtout n'échappent pas toujours à la difficulté de verser trop de liquide et de dépasser le terme de la réaction. On évite en partie ce danger en réservant pour la fin une partie du liquide à analyser. J'ai trouvé quelque avantage dans l'emploi du procédé suivant, qui me permet de verser à la fois plusieurs centimètres cubes de liquide et qui me met à chaque instant à même de savoir, avec une approximation suffisante, de combien j'approche du terme de la réaction. Pour fixer les idées, soit à déterminer par le permanganate de potassium la quantité de fer contenue dans une solution (nous supposons cette quantité complètement inconnue à l'observateur). Je verse la solution dans un appareil très facile à réaliser, deux entonnoirs égaux réunis par un tube de caoutchouc. Je les place sur deux anneaux à égale hauteur, et je les suppose assez grands pour contenir chacun toute la solution. Je place la burette graduée contenant le permanganate au-dessus d'un des entonnoirs ; je laisse tomber une goutte de réactif, qui se décolore. Puisqu'une goutte ne suffit pas pour un des entonnoirs, il faudra au moins deux gouttes pour les deux. Je puis donc verser une seconde goutte; celle-ci se décolore de nouveau. Deux gouttes ne suffisent pas pour un des entonnoirs ; il en faudra au moins quatre pour les deux. Je puis donc laisser tomber deux nouvelles gouttes, puis quatre, puis huit, puis seize, et ainsi de suite. Après en avoir versé soixante-quatre de suite, supposons que la couleur rouge du permanganate persiste. Je soulève en ce moment le second entonnoir de façon à faire pénétrer le liquide dans le premier, je soumets toute la masse à l'action d'un agitateur, puis je replace le second entonnoir sur son anneau. Dans cette première phase de l'opération, j'ai versé successivement une, puis une seconde, puis deux,... puis soixante-quatre gouttes, en somme cent vingt-huit gouttes. Cent vingt-huit gouttes dépassant ce qu'il faut pour la moitié de la solution, je suis assuré de n'avoir plus besoin de ce nombre à l'avenir.

J'opère sur le liquide modifié comme j'ai opéré sur le liquide primitif, en laissant tomber une goutte, puis une autre, puis deux, puis quatre. Dans cette nouvelle phase, je suis sûr de ne pas dépasser trente-deux gouttes. Quand la couleur rouge persiste, je fais le mélange des deux entonnoirs. — Quand il n'y a plus que cinq ou six gouttes à ajouter, il vaut mieux opérer sur l'ensemble du liquide.

Telle est la théorie du procédé. En pratique, l'opération se simplifie encore, grâce aux divisions que porte la burette graduée. Je détermine, une fois pour toutes, au début de l'opération, combien il faut de gouttes pour que la solution titrée descende d'un demi-centimètre dans la burette. Supposons qu'il en faille dix ou onze. Dès que j'ai ajouté seize gouttes à la fois, la fois suivante je laisse écouler un demi-centimètre, puis un centimètre, puis deux... Il est facile de démontrer que si j'ai dû verser un centimètre ou plus à la fois dans une des phases de l'opération, je pourrai, dans la phase suivante, recommencer par demi-centimètre au lieu de recommencer par goutte. Tant qu'on est assez éloigné du terme de la réaction, il n'y a aucun inconvénient à ce que le mélange des liquides contenus dans les deux entonnoirs ne soit pas effectué parfaitement; l'opération peut ainsi être accélérée.

M. Van Biervliet entretient la section de diverses applications de la méthode de Poggendorf à certains cas particuliers de goniométrie et à l'étude des indices de réfraction.

Soit à déterminer l'angle formé par les deux faces presque parallèles A et B d'une lame transparente. On argente les deux faces A et B, puis on enlève l'argenture sur la moitié de la face A. La lame ainsi préparée est disposée devant la lunette et l'échelle divisée. La méthode connue de Poggendorf nous donnera immédiatement l'angle apparent $\delta$ des deux faces argentées. — Je dis l'angle apparent, car c'est l'angle vrai $\alpha$ modifié par la réfraction. — $n$ étant l'indice de réfraction, supposé connu, de la lame, on aura, à cause de la petitesse des angles,

$$\alpha = \frac{\delta}{n}.$$

En modifiant légèrement le dispositif qui précède, on arrive à déterminer l'indice de réfraction d'un liquide. Formons un prisme à liquide d'un très petit angle, à l'aide de deux lames de verre argentées du côté intérieur au prisme, l'une sur toute son étendue, l'autre sur la moitié seulement de cette étendue. La méthode de Poggendorf nous donnera avec une grande précision l'angle $\alpha$ des lames. Introduisons maintenant quelques gouttes du liquide à étudier; nous trouverons comme précédemment un angle apparent $\delta$, et l'indice du liquide sera

$$n = \frac{\delta}{\alpha}.$$

*Mardi, 3 avril 1888.* — Le R. P. Carbonnelle a remis au président un mémoire de M. le M[is] de Montgrand sur la réfraction atmosphérique. Le R. P. Delsaulx et M. Van Biervliet sont désignés pour examiner ce travail.

*Jeudi, 5 avril 1888.* — M. Van Biervliet présente les observations suivantes au sujet des régulateurs de température :

Presque tous les régulateurs de température que l'on emploie dans la pratique courante des laboratoires sont fondés sur la dilatabilité de l'air. On introduit dans l'enceinte soumise au réglage une chambre à air dont les variations de volume déplacent une colonne de mercure, laquelle vient fermer plus ou moins l'ouverture d'admission du gaz de la lampe. Deux causes peuvent intervenir pour modifier la température stationnaire que ces appareils devraient maintenir constante. L'air de la chambre se trouve soumis à une pression qui comprend deux éléments variables : la pression du gaz d'éclairage et la pression atmosphérique. Les variations de pression du gaz, d'après les heures de la journée et le nombre de becs alimentés sur le réseau, peut varier de 4 centimètres d'eau, soit 3 millimètres de mercure ou $\frac{1}{250}$ d'atmosphère. Il est facile de voir quels seront les effets d'une telle variation.

L'air étant comprimé, la colonne de mercure reculera, et l'admission du gaz (qui devrait se faire par une ouverture restreinte,

puisque la pression augmente) deviendra plus large; la lampe donnera plus de chaleur et la température montera. La température redeviendra stationnaire quand l'admission aura été ramenée sensiblement à son premier état. Ceci aura lieu quand l'enceinte aura subi une variation de température $\Delta t$ liée à la variation de pression $\Delta p$ par la formule $\alpha \Delta t = \Delta p$, $\alpha$ étant le coefficient de dilatation du gaz. En substituant les valeurs $\alpha = 0{,}0036$, $\Delta p = 0{,}004$, on trouve $\Delta t = 1°{,}1$.

Le même raisonnement montre que toute variation de 3 millimètres dans la pression atmosphérique doit amener une variation de 1°,1 pour la température stationnaire de l'enceinte.

Le raisonnement qui montre le défaut des régulateurs à air fait voir immédiatement la supériorité d'une autre catégorie d'appareils, les régulateurs à tension de vapeur. Un physicien allemand, M. Andreæ, et après lui M. Benoît, directeur-adjoint au bureau international des poids et mesures, ont introduit récemment dans la pratique des laboratoires, en le modifiant, un procédé connu antérieurement dans l'industrie. Dans ce procédé, la fonction de la température qui sert de régulateur n'est plus le volume d'une masse d'air, mais la tension maximum d'une vapeur saturée. Si l'on se rappelle l'allure des courbes qui représentent cette tension maximum en fonction de la température, on comprendra sans peine quelle prodigieuse sensibilité ces appareils permettent d'atteindre. En choisissant convenablement le liquide volatil, on pourra toujours faire en sorte que le degré de température corresponde à une variation de pression de plusieurs centimètres de mercure, et dès lors la variation de 3 millimètres, dont j'ai parlé précédemment, ne correspondra plus qu'à une fraction insignifiante de degré.

Comme on le voit, ces régulateurs à tension de vapeur n'échappent pas aux deux causes d'erreur signalées plus haut, mais il devient possible d'en atténuer l'effet dans telle mesure que l'on voudra.

Dans le cas particulier où l'on aurait à régler la température d'une étuve à eau, il est facile de constituer un régulateur qui échappe entièrement aux causes d'erreur signalées; il suffit de

substituer à la chambre à air ou à vapeur le volume total de l'eau. Ce volume, étant généralement de plusieurs litres, donnera pour un degré de température une dilatation très appréciable et, d'autre part, l'incompressibilité du liquide s'opposera à toute variation de pression.

Le dépouillement du scrutin pour l'élection du bureau de la section donne les résultats suivants :

| | |
|---|---|
| *Président,* | MM. Fr. DEWALQUE. |
| *Vice-Présidents,* | THIBAUT et le R. P. GEORGE. |
| *Secrétaire,* | VAN BIERVLIET. |

### Troisième section.

—

*Jeudi, 27 octobre 1887.* — M. l'abbé Smets décrit une vertèbre appartenant à un serpent fossile, *Paleophis typhœus*, Owen, provenant d'un horizon dans lequel on n'en avait pas encore trouvé.

M. Van Ortroy expose, d'après les données les plus récentes, le cours du fleuve Ouellé.

M. Dollo résume l'histoire naturelle d'une espèce de requin dont on a capturé récemment un individu dans la mer du Nord; puis il entretient la section de l'humérus d'*Erquelinnesia;* les caractères de cet os confirment l'opinion que l'auteur avait émise précédemment sur la nature fluviale de ce reptile.

*Jeudi, 26 janvier 1888.* — M. de la Vallée Poussin fait une communication sur les roches dioritiques ou amphiboliques qui sont insérées dans les terrains cambriens des Ardennes françaises et qui apparaissent surtout dans la vallée de la Meuse, entre Deville et Revin. Il décrit la structure de quelques-uns

de ces affleurements dioritiques actuellement exploités. Il montre qu'ils sont formés en partie de roche massive et grenue, en partie de roche schisteuse analogue au chloritoschiste; et il fait voir par la disposition réciproque de ces deux types différents de roches, comme par leur examen microscopique, que le chloritoschiste n'est qu'une transformation de la diorite ou de l'amphibolite grenue. D'après M. de la Vallée, les dites roches présentent un exemple des plus remarquables de métamorphisme mécanique.

M. le D[r] Delgeur montre une reproduction de la carte de Peutinger et fait l'historique de celle-ci.

M. De Lantsheere expose les motifs qui doivent faire considérer les Hittites de la Palestine comme des parents des Hittites de l'Asie Mineure.

*Mardi, 3 avril 1888.* — Le R. P. Vanden Gheyn retrace l'histoire des Goths orientaux.

M. l'abbé Smets signale la présence de *Silurus Egertoni*, poisson d'eau douce, dans le terrain bruxellien, puis il expose les caractères des Chélonées rupéliennes.

M. de la Vallée Poussin montre le « Erdprofil » publié par M. Lingg et il en fait ressortir le grand intérêt.

*Mercredi, 4 avril 1888.* — M. Dollo énumère et développe les nombreuses ressemblances si profondes qu'il y a entre les Dinosauriens et les Oiseaux, puis il cherche quel peut être, parmi les premiers, l'ancêtre des Oiseaux; par la considération attentive du crâne, des ceintures pelvienne et scapulaire, des membres supérieurs et inférieurs, il démontre que ce ne peut pas être l'Iguanodon.

M. R. Storms expose la constitution morphologique des nageoires verticales chez les Poissons osseux; puis il montre que le disque céphalique du Rémora est une nageoire transformée.

M. H. Siret fait connaître la composition et l'origine des objets métalliques qui étaient employés par les peuplades préhistoriques du sud-est de l'Espagne.

La section procède au renouvellement de son bureau. Sont élus :

| | |
|---|---|
| *Président,* | MM. DE KIRWAN. |
| *Vice-Présidents,* | H. SIRET et le Dr L. DELGEUR. |
| *Secrétaire,* | BUISSERET. |

*Jeudi, 5 avril 1888.* — M. le Cte Adolphe de Limburg-Stirum discute la division du terrain quaternaire en étages.

M. le Dr Delgeur rappelle les différentes tentatives qui ont été faites pour traverser le Groënland.

## Quatrième section.

—

*Jeudi, 27 octobre 1887.* — M. Schneider rappelle en termes émus la part que M. Hairion, récemment décédé, a prise à la fondation de la Société scientifique, et combien la section de médecine lui est redevable du succès de ses réunions. Tant que la santé le lui permit, M. Hairion ne manqua jamais d'assister aux séances de la section, de prendre une part active à ses discussions et de les éclairer des lumières de son érudition et de son expérience. Aussi M. Schneider est-il sûr d'être l'interprète de tous ses collègues en exprimant les vifs regrets que lui fait éprouver cette perte.

Au nom de M. le Dr R. Warlomont, le secrétaire lit un travail sur les blépharites dans leurs rapports avec les anomalies de la réfraction. En présentant ce mémoire, M. Warlomont a pour but d'attirer l'attention sur l'une des causes qui rendent parfois rebelles à tout traitement pharmaceutique des blépharites

d'apparence banale, et de nous montrer que l'emploi d'un verre, le plus souvent convexe, fait parfois disparaître rapidement l'inflammation du rebord palpébral. Il trouve l'explication de ce fait dans la communauté de vascularisation existant entre le corps ciliaire et les paupières.

M. Schneider expose ensuite trois cas de pleurésie auxquels il attribue une origine infectieuse. Le premier est celui d'un enfant de 5 ans, qui présenta le début apparent d'une méningite, et auquel l'emploi de l'iodoforme à l'extérieur, de l'iodure de potassium à l'intérieur semblait procurer la guérison, quand, vers le troisième jour de la convalescence, se manifestèrent tout à coup les symptômes d'une pleurésie aiguë, que M. Schneider soupçonna bientôt d'être purulente. L'épanchement était énorme. Il occupait la plèvre droite presque entière et abaissait fortement le foie dans l'abdomen. La ponction donna issue à deux litres de pus. L'épanchement se reproduisit et, quinze jours après la ponction, M. Schneider dut pratiquer l'opération de l'empyème. Tous les deux jours, il lava la plaie avec une solution d'acide borique. Bientôt les sécrétions diminuèrent et le vide pleural se combla par l'affaissement des côtes et un certain degré de scoliose, dont un traitement gymnastique bien entendu finit par avoir raison. L'enfant est aujourd'hui entièrement guéri. Presque au moment où ce petit malade contractait sa pleurésie, son père présenta un ensemble symptomatique, d'abord vague : agitation, insomnie, épistaxis, et qui aboutit également à un point de côté violent, siégeant à droite, et à un épanchement pleural considérable. La guérison demanda trois mois de traitement.

Enfin, dans la même maison, une troisième personne devint malade, en présentant des symptômes semblables à ceux que nous venons de relater.

M. Schneider n'a pu trouver dans l'habitation de ces malades de cause évidente d'insalubrité; cependant il sait que, sous ce rapport, la maison a été soupçonnée par l'autorité communale, car on y a pratiqué des mesures de désinfection avant l'éclosion des cas que nous venons de rapporter. Mais l'ensemble des phé-

nomènes observés, l'état général sérieux des malades, la coïncidence des trois maladies, la purulence d'emblée chez l'enfant, font croire à une origine infectieuse.

L'examen bacillaire n'a pas été pratiqué : on sait, d'ailleurs, qu'il n'a pas dit son dernier mot en ce qui concerne la pleurésie. Le pansement consécutif à l'empyème a été antiseptique. M. Schneider eut recours au drainage de Dujardin-Beaumetz, qui consiste dans l'emploi de trois drains d'égale longueur assujettis les uns aux autres.

M. Verriest préconise pour le drainage l'emploi d'un tube en caoutchouc entrecoupé d'un tube de verre pour contrôler l'écoulement, et venant s'aboucher dans un récipient que le malade peut porter à l'intérieur du gilet. L'extrémité du tube qui s'abouche avec le récipient est pourvue de deux morceaux de baudruche, dont le rôle est de s'opposer au reflux de l'air du flacon dans la plèvre.

Quant au lavage, M. Verriest ne l'admet que s'il y a fétidité de l'épanchement, et il croit, d'ailleurs, qu'en certains cas la simple ponction suffit à la cure d'un épanchement purulent. « Le plus souvent, dit-il, le lavage est illusoire dans la plus grande étendue de la plèvre, en raison des adhérences et des recessus qu'elles limitent. L'injection d'un liquide ne peut certes renouveler le contenu des cavités formées par les exsudats inflammatoires. »

M. Borginon, le traducteur de l'œuvre de Lister, dit que l'éminent clinicien anglais ne fait pas le lavage de la plèvre, et qu'il se contente d'assurer l'écoulement des liquides épanchés en se servant d'un tube métallique (cuivre) à large rebord. Il ne redoute pas l'entrée de l'air dans la plèvre, mais il le fait passer à travers une gaze antiseptique. Le chlorure de zinc assure, paraît-il, pour quatre jours l'asepsie du liquide.

M. Schneider a pratiqué, il y a une quinzaine de jours, une ponction dans un cas d'épanchement pleural abondant. Il retira,

en effet, de la plèvre gauche environ 3 $^1/_2$ litres de sérosité. Mais, après l'écoulement de cette énorme quantité de liquide, il constata avec surprise la même matité du thorax qu'avant l'opération. Le malade était en proie à un état d'angoisse très inquiétant, survenu après une quinte de toux. L'agitation et le malaise étaient tels que l'on pouvait craindre une mort très prochaine, quand, tout à coup, le calme se fit, et la sonorité se manifesta dans tout le thorax. M. Schneider attribue ce phénomène à l'emprisonnement du poumon, recouvert d'un exsudat qui s'organisait, et au brusque déplissement de l'organe pulmonaire, par suite de la rupture de l'enveloppe qui l'enserrait.

Incidemment, M. Proost soulève la question des conséquences sanitaires pouvant résulter de l'irrigation des champs de culture par l'eau des égouts. Cette eau, souillée de nombreux détritus de matières organiques, chargée des microbes des maladies infectieuses, ne va-t-elle pas vicier l'atmosphère des campagnes d'abord, puis les rivières dans lesquelles elle se déversera après sa filtration à travers le sol? Cette question n'est pas définitivement résolue, bien que les expériences tentées jusqu'à ce jour soient de nature à faire admettre l'innocuité de ce système d'irrigation.

Enfin M. Verriest traite la question de la diète dans la néphrite. Il constate que l'on est généralement d'accord pour considérer le traitement pharmaceutique comme de peu de valeur pour combattre cette maladie. Tout le monde, au contraire, admet l'heureuse influence du régime lacté. Mais comment agit le lait? Est-ce par sa composition chimique, par l'efficacité particulière de l'un ou l'autre de ses éléments, caséine, sucre de lait, sels? Sans le nier, ou plutôt sans le contester formellement, M. Verriest croit que si le lait est favorable dans le traitement de la néphrite, c'est parce que, administré comme il l'est généralement, il laisse les reins presque à l'état de repos. En effet, au lieu de faire deux, trois, quatre repas au lait dans la journée, on prend ordinairement ce liquide par fractions

moindres et plus souvent répétées. Dans ces conditions, tout en assurant la nutrition générale, le lait ne donne guère de surcroît au travail d'élimination des reins, ou du moins il le répartit sur toute une longue série d'heures. La composition du lait est, d'ailleurs, bien faite pour ne pas permettre une absorption rapide.

Une fois dans l'estomac, il se prend en caillot. L'albumine et surtout la caséine, qui forme une portion considérable de son volume, demandent une élaboration spéciale, peptonisante, avant de passer dans les vaisseaux de l'estomac et dans ceux de l'intestin; le sérum seul est d'abord résorbé petit à petit, puis le coagulum albumineux progressivement transformé.

Si l'on exprime par une courbe la rapidité avec laquelle a lieu l'absorption d'une quantité donnée d'eau introduite dans l'estomac, on voit que cette courbe arrive rapidement à son sommet et regagne, également en peu de temps, dans sa descente la ligne horizontale. L'élimination de cette eau par les reins se fera un peu plus tardivement, mais rapidement encore et en activant sensiblement la sécrétion normale, eu égard à ce qu'elle est à l'état de diète.

Si l'on introduit l'eau directement dans les veines, cette brusque absorption détermine aussi un accroissement brusque du travail des reins, ce qui est sans influence fâcheuse sur des organes sains, mais peut accroître l'affection d'un organe dont l'état inflammatoire exige le repos.

Si l'eau, au lieu d'être introduite comme telle dans l'estomac, fait partie intégrante des aliments que l'on ingère (viande, légumes, lait), elle exigera naturellement un temps plus considérable pour être absorbée, et, d'après M. Verriest, c'est sous forme de lait que l'eau sera absorbée le plus lentement, car le lait se prend dans l'estomac en un coagulum qui doit être attaqué peu à peu par le suc digestif, de la périphérie du bloc vers son centre, tandis que les autres aliments sont broyés et divisés avant de pénétrer dans l'estomac, et, une fois dans cet organe, présentent, par cette division même, de multiples surfaces à l'attaque du fluide digestif. L'absorption des différents éléments du lait



sera donc graduelle, et l'on peut dire qu'il en sera de même de l'élimination des produits cellulaires excrémentitiels à laquelle il donnera lieu. Le rein restera donc presque en repos, c'est-à-dire dans la condition la plus favorable à sa guérison, surtout, comme nous le disions plus haut, en raison des prises fractionnées en usage dans la diète lactée.

Cette interprétation de l'action favorable de ce régime soulève quelques réserves de la part de M. Schneider, qui fait remarquer qu'il n'y a pas à considérer seulement le caséum dans le lait introduit dans l'estomac, mais aussi le sérum, et que ce sérum constitue un volume important, eu égard à la quantité de lait ingérée; qu'en outre, si le coagulum contient encore du liquide qu'il ne doit abandonner que peu à peu à l'absorption, ce liquide est fort peu important vis-à-vis du sérum, libre dès la coagulation du lait.

M. Borginon attribue au lait une action diurétique douce et réelle; il se demande si le sucre de lait n'aurait pas ici l'influence qu'exerce le glycose dans le diabète sur l'hypersécrétion urinaire.

On fait observer à M. Borginon que, si le glycose existe dans l'urine des diabétiques, on ne constate pas, en général, la présence du sucre dans l'urine des néphritiques.

Enfin, M. Verriest croit qu'on pourrait, en cas d'intolérance du régime lacté, remplacer ce régime par une alimentation qui, comme le lait, ne céderait que peu à peu ses principes à l'absorption, par exemple le riz, les fécules granulées... D'ailleurs de nouvelles recherches pourront élucider ce point particulier.

*Jeudi, 5 avril 1888.* — Après la lecture du procès-verbal de la séance précédente, M. Borginon fait remarquer que l'irrigation par l'eau d'égout dont il est fait mention dans ce procès-verbal pourrait bien ne pas être sans influence sur la propagation de certaines affections contagieuses.

Il se base sur l'éclosion de plusieurs cas de fièvre typhoïde dans le personnel ouvrier employé au curage des fosses à purin.

Mais on doit observer que l'apparition de la fièvre typhoïde, dans ce cas, n'implique pas précisément la propagation des germes contagieux par l'air. Les soins de propreté peu scrupuleux des ouvriers employés aux travaux des champs expliquent suffisamment l'absorption des germes morbifiques par les voies digestives. Il résulte, d'ailleurs, d'une récente discussion qui a eu lieu au Conseil d'hygiène publique, que l'irrigation par les eaux d'égout semble être sans influence sur la propagation des maladies.

La parole est donnée ensuite à M. Venneman pour exposer un mode de pathogénie des affections des voies lacrymales. Comment se fait-il, se demande l'orateur, que les maladies aiguës de la conjonctive se communiquent assez rarement aux voies lacrymales? Les microbes les traversent cependant en abondance, et il est plus que probable qu'ils n'ont point encore perdu à ce moment ni leur vitalité, ni leur pouvoir de reproduction. M. Venneman estime, en s'appuyant sur des observations cliniques, qu'une condition indispensable à la prospérité des microbes, c'est la congestion du tissu sur lequel ils se trouvent. Comment agit cette congestion? Est-ce en affaiblissant la vitalité des éléments cellulaires épithéliaux? Très probablement non, car cette hypothèse ne s'accorde guère avec l'existence d'une vascularisation plus riche. Il est, au contraire, très rationnel d'admettre que l'hyperhémie provoque une superproduction de nouvelles cellules, en si grand nombre qu'elles manquent en quelque sorte d'organisation pour remplir leur rôle protecteur vis-à-vis des muqueuses, et qu'elles deviennent la proie des microbes.

Mais d'où vient que la congestion des voies lacrymales n'accompagne pas plus souvent celle de la conjonctive? Cela tient à l'origine différente de leur vascularisation. Les voies lacrymales tirent leurs vaisseaux de la même provenance que les bords ciliaires, c'est-à-dire de l'artère naso-frontale, tandis que les conjectives les reçoivent de la palpébrale interne et de l'artère orbitaire. Tant que les vaisseaux des bords ciliaires ne sont pas encombrés, il n'y a pas d'hyperhémie des voies lacrymales. Cette hyperhémie existe, au contraire, quand les bords ciliaires sont

enflammés, soit pour leur propre compte, soit consécutivement aux affections chroniques des conjonctives. Les voies nasales et lacrymales reçoivent des rameaux vasculaires de même origine. Aussi n'est-il pas rare de voir les secondes s'hyperhémier et s'enflammer consécutivement à des affections chroniques qui envahissent les premières.

M. Struelens développe ensuite la genèse des nécroses des maxillaires chez les ouvriers qui manipulent le phosphore blanc. On sait que la fabrication des allumettes comprend la taille, la mise en cadre, le trempage, le dégarnissage et la mise en boites. De ces opérations, le trempage (y compris le dégarnissage) et la mise en boite sont les plus dangereux.

M. Struelens fait le tableau effrayant de l'aspect des malheureux ouvriers atteints de nécrose. Au point de vue de leur état général, ils sont frappés de déchéance organique et susceptibles de contracter toutes les affections contagieuses. Quant à l'état des mâchoires, il est horrible. Les gencives sont enflammées, bouffies, fétides, criblées de fistules aboutissant au périoste et aux os des maxillaires nécrosés et tombant par fragments considérables. L'infection purulente, des complications cérébrales et méningées viennent souvent mettre fin à cette terrible scène morbide. — On a préconisé l'emploi de l'essence de térébenthine contre l'intoxication phosphorée, la ventilation de l'atelier par le plancher, en raison de la grande densité du phosphore, et surtout la substitution du phosphore rouge au phosphore blanc.

Quelle est la genèse des accidents attribués au phosphore? Il est acquis que la carie dentaire favorise, dans une très large mesure, l'apparition des troubles que nous venons d'exposer. Le phosphore pénétrerait par les points de carie, et s'en prendrait de proche en proche au tissu osseux en se dissolvant dans ses parties graisseuses. Mais, étant donnée la facilité d'absorption que présentent les voies respiratoires vis-à-vis du phosphore, n'est-il pas rationnel de penser que ce corps exerce d'abord sa terrible influence sur l'état général, et ne provoque que par son intermédiaire ses funestes effets? Telle est l'opinion de M. Borginon. Toutefois, la grande fréquence des accidents locaux comme phé-

nomènes primitifs et l'existence presque constante d'une carie dentaire antérieure donnent à la première interprétation le plus de vraisemblance.

M. Goris expose ensuite le récit de diverses opérations pratiquées sur des sujets atteints de tumeurs des fosses nasales, de la partie supérieure du pharynx et du maxillaire : tumeurs fibreuses, adénoïdes, sarcomateuses, qu'il fait passer sous nos yeux.

Il indique ensuite le procédé opératoire et l'appareil instrumental auxquels recourt le chirurgien en présence de ces néoplasmes. (Voir 2e partie, pp. 282 et suivantes.)

Enfin le dernier sujet à l'ordre du jour est celui que développe le secrétaire de la section, et qui est relatif à l'influence du café sur l'excrétion de l'urée urinaire. M. Dumont déduit de ses expériences des conclusions favorables à l'action antidéperditive du café.

La section procède ensuite au dépouillement du scrutin pour l'élection du Bureau, qui est ainsi constitué :

| | |
|---|---|
| *Président,* | MM. VENNEMAN. |
| *Vice-présidents,* | CUYLITS et MOELLER. |
| *Secrétaire,* | A. DUMONT. |

---

## ASSEMBLÉES GÉNÉRALES

### I

#### ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 27 OCTOBRE 1887.

La conférence avait pour sujet *Les premiers âges du métal dans le sud-est de l'Espagne.*

MM. Henri et Louis SIRET, membres de la Société scientifique de Bruxelles, après avoir exploré, entre Carthagène et Almérie,

une zone côtière de 75 kilomètres et fouillé environ quarante stations préhistoriques, ont mérité, en 1887, pour le compte rendu de leurs magnifiques découvertes, le prix de 20,000 francs fondé à Barcelone par D. Francisco Martorell y Pena. C'est de ces belles recherches, qui produisirent dans le monde savant une si profonde sensation, qu'ils entretiennent l'assemblée générale, à laquelle ils montrent en même temps des spécimens de la riche collection qu'ils ont rapportée dans leur patrie.

On sait combien sont rares les renseignements qu'on possède sur les anciens habitants de la péninsule ibérique. C'est ainsi qu'il existe à Madrid un musée archéologique remarquable, quoique installé dans des locaux insuffisants, dans lequel on peut admirer une superbe collection de monnaies et de médailles, de précieuses antiquités historiques, une belle série d'armes et de poteries péruviennes et mexicaines; mais la partie préhistorique relative à l'Espagne y fait presque entièrement défaut.

MM. Siret sont parvenus à recueillir une quantité énorme de matériaux pour l'étude des premiers temps de l'humanité en Ibérie; rien n'y manque, toutes les séries d'objets qu'on trouve dans les collections de ce genre y sont largement représentées : les outils en pierre, en silex et en os, la poterie, les armes et instruments de métal, les bijoux de pierre, de cuivre, d'argent et d'or, les crânes humains, les squelettes, les tissus, etc., permettent d'étudier d'une manière complète ces civilisations primitives, et de répondre à plusieurs questions qui jusqu'à présent étaient des énigmes dans la préhistoire.

Les conférenciers ont conduit l'auditoire à travers les progrès successifs accomplis par les peuples dont ils ont révélé l'existence. Ils ont montré comment d'abord ces hommes se servaient exclusivement d'outils en pierre et se construisaient des huttes grossières; puis de quelle manière des coutumes nouvelles et des objets plus perfectionnés leur furent apportés par des commerçants étrangers, au contact desquels les conditions de leur existence s'améliorèrent; comment enfin se développa une troisième phase de civilisation, où les monnaies, le fer et les inscriptions

restèrent encore inconnus, mais où les arts ont notablement progressé, et où les coutumes funéraires dénotent un respect touchant pour les défunts. C'est dans cette phase que l'on voit apparaître une grande quantité d'objets en argent, fait nouveau dans la période appelée *âge du bronze,* mais qui s'explique aisément par la présence de l'argent natif dans la contrée explorée.

MM. Siret ont terminé en invitant leurs auditeurs à venir faire plus ample connaissance chez eux, à Anvers, avec leurs superbes collections. L'ouvrage monumental où ils décrivent dans tous les détails leurs remarquables découvertes a paru dans le courant de novembre 1887. La *Revue des questions scientifiques* (janvier et avril 1888) a publié sous le titre : *Les premiers âges du métal dans le sud-est de l'Espagne,* un article de MM. H. et L. Siret, où l'on trouvera la plus grande partie de leur conférence.

## II

### ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 26 JANVIER 1888.

La conférence de ce jour, faite par M. Germain Bapst, avait pour sujet l'*Étain dans l'antiquité.*

La question de l'étain est une des plus importantes de l'archéologie; elle soulève à chaque instant de nouvelles controverses, et de nouveaux travaux viennent aussi à tout moment l'éclairer d'un nouveau jour.

La découverte de l'étain par l'homme et son usage marquent un des grands pas du progrès intellectuel. En effet, si le cuivre est facile à trouver, s'il se présente à la vue d'une façon saisissante, l'étain se cache à l'état d'oxyde sous des formes peu attrayantes.

Le mélange de l'étain et du cuivre produit un métal de qualité particulière, et il a fallu un esprit d'observation très avancé pour arriver à inventer cet alliage.

Avant d'étudier d'où provient l'étain, il importe de signaler une tendance du monde savant à reconnaître qu'avant l'âge du

bronze il a existé presque partout un âge du cuivre pur, succédant à l'âge de la pierre.

Étant donné, d'après les monuments retrouvés en Égypte ou en Chaldée, que l'étain était exploité et servait à la composition du bronze trois mille ans avant Jésus-Christ, il importe de chercher d'où il a pu provenir dès les premiers temps. On a longtemps cru que c'était du Caucase, mais on a constaté depuis que les montagnes de l'isthme Pontocaspien ne contenaient point ce métal; que Malacca et Banca étaient beaucoup trop loin pour avoir été la source alimentaire des premiers hommes qui exploitèrent l'étain au centre du monde ancien; que les Iles Britanniques et l'Espagne n'avaient pu non plus le leur fournir, ces deux contrées n'étant pas vraisemblablement encore explorées à cette époque par les navigateurs. Alors on s'est retourné vers les renseignements fournis par les textes anciens, pour rechercher si l'Asie centrale avait possédé des mines d'étain. Strabon indique bien la Drangiane (le Khorassan d'aujourd'hui) comme produisant de l'étain. Ce texte du géographe a amené un grand nombre d'archéologues à s'occuper de cette question, et elle mérite d'être profondément étudiée.

Le texte de Strabon est appuyé par le dire de certain voyageur russe; cependant, pour quiconque connaît le pays, l'affirmation de Strabon et celle qui a été communiquée à la Société de géographie de Saint-Pétersbourg sont loin d'être décisives; mais, sans rien affirmer, on peut dire que le jour où il serait démontré qu'il y a de l'étain au Khorassan, le problème de la recherche de notre métal dans la haute antiquité serait résolu.

Si, au contraire, on acquérait la preuve que l'étain n'existe point dans la Perse orientale, il resterait à rechercher un autre point du globe qui aurait pu le produire. Ce point, c'est l'Altaï, que plusieurs raisons désignaient autrefois comme ayant dû fournir l'alliage du bronze; mais, à l'heure qu'il est, les géologues n'ont point encore analysé les roches de ces montagnes aujourd'hui inhabitables; et là encore, si nombre de faits d'ordre moral nous font émettre des hypothèses, les faits matériels manquent pour pouvoir donner la preuve de l'existence de l'étain dans l'Altaï.

Quoi qu'il en soit, aussitôt que les Phéniciens et les Carthaginois eurent sillonné les mers en tous sens, on exploita l'étain sur tous les points du globe où son existence fut constatée ; mais nulle part l'exploitation ne fut plus active qu'en Angleterre. Les passages qui subsistent de Possidonius nous ont fourni les détails les plus précis sur cette exploitation et sur le commerce auquel elle donnait lieu.

Enfin, au commencement de notre ère, nous constatons que l'étain est employé, en diverses circonstances, à l'état de métal pur et joue le rôle d'imitation d'argent; sa qualité essentielle d'être le plus sain de tous les métaux lui donne un usage constant dans la médecine. C'est dans les vases ou les custodes d'étain que les médecins de l'antiquité ordonnaient de tenir les remèdes qu'ils préparaient, parce que ce métal conserve ces préparations avec le moins d'altération.

Voilà ce que nous savons aujourd'hui de l'étain dans l'antiquité. Les problèmes sont posés; jusqu'à présent, les solutions se réduisent souvent à des hypothèses ; mais ces hypothèses peuvent d'un moment à l'autre devenir des certitudes, ou du moins servir à de nouvelles découvertes qui amèneront la connaissance de la vérité.

On trouvera dans la *Revue des questions scientifiques*, avril 1888, le résumé de cette conférence.

## III

### ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MARDI 3 AVRIL 1888.

Le R. P. Carbonnelle, secrétaire de la Société scientifique, lit le rapport suivant :

Messieurs,

La circulaire du 3 mars dernier, en vous annonçant que le Conseil avait résolu d'avancer d'une semaine la session annuelle de 1888 et d'en réduire la durée à trois jours, ajoutait que cette



décision avait été prise pour éviter des coïncidences de dates. Vous avez aisément deviné les deux faits principaux auxquels cette formule faisait allusion.

Le premier est la résolution, prise par les catholiques d'un pays voisin, de réunir un congrès international de savants et d'écrivains animés du même esprit que la Société scientifique de Bruxelles, congrès auquel plusieurs de nos membres les plus actifs ont été invités, et dont la Commission organisatrice, soit qu'elle ignorât nos usages, soit que les circonstances ne lui permissent pas d'agir autrement, a fixé la réunion aux jours où, depuis des années, nous tenions nous-mêmes nos séances Ceux d'entre vous, Messieurs, qui ont l'intention d'y prendre part sauront gré au Conseil de sa décision, et les autres, j'en suis sûr, ne lui reprocheront pas cet acte de courtoisie. Nous devons tous souhaiter que la nouvelle entreprise réussisse, car elle a pour but, comme la nôtre, de montrer au monde qu'il n'y a pas d'opposition entre la foi et la raison, pas d'incompatibilité entre l'esprit scientifique et l'esprit religieux.

Le second motif du changement adopté cette année est la date choisie pour le départ des pèlerins belges qui vont à Rome dire au Souverain Pontife, à l'occasion de son jubilé sacerdotal, combien la Belgique est dévouée au Saint-Siège et à l'Église. C'est le 9 avril que les trains spéciaux doivent les emporter; et c'eût été précisément le 9 avril que nous aurions ouvert notre session, si nous nous étions conformés, cette année, aux précédents. Parmi ces pèlerins, la Société scientifique compte un certain nombre des siens. Ils remercieront Léon XIII des encouragements qu'à plusieurs reprises il a daigné accorder à notre œuvre. Déjà, du reste, l'exposition belge de la rue des Douze-Apôtres et l'exposition universelle du Vatican ont accueilli, avec les œuvres de plusieurs d'entre nous, les volumes de nos *Annales* et de notre *Revue* que la Société scientifique a fait présenter au Saint-Père en cette occasion. La collection complète de nos publications est maintenant au palais du pontife, et elle y témoigne des efforts que nous faisons pour répondre dignement à ses encouragements, ainsi que de notre filial dévouement.



Chose remarquable, Messieurs, et bien faite pour désespérer un secrétaire chargé de vous faire son rapport annuel, le changement de date dont je viens de vous exposer les raisons est, malgré son peu d'importance, l'événement le plus saillant que je trouve à vous signaler. Pour tout le reste, l'activité de notre vie sociale ne s'est pas ralentie, mais elle n'a rien perdu de sa tranquillité. Ni luttes, ni compétitions, ni intrigues. Nos deux publications, *Annales* et *Revue*, ont continué à faire paraître des travaux appréciés des savants et du public choisi auquel nous les adressons. Il ne me reste donc qu'à vous signaler le mouvement de nos listes.

Notre liste funèbre renferme, hélas, le nom d'un des professeurs les plus sympathiques de l'Université de Louvain, le vénérable M. Hairion, qui fut plusieurs fois président de notre section des sciences médicales, et donna toujours l'exemple de l'assiduité aux séances de cette section. Il laisse parmi nous, comme parmi ses collègues et ses anciens élèves, des regrets unanimes et un souvenir ineffaçable.

Nous comptons aujourd'hui 540 membres, dont 177 étrangers et 363 Belges; c'est 22 de moins que l'année dernière et, chose qui doit un peu nous piquer, parmi ces 22 manquants, il y a 21 Belges. Ne vous semble-t-il pas que le patriotisme exige de nous un peu de propagande?

Le nombre des abonnés à la *Revue des questions scientifiques*, qui, l'année dernière, avait légèrement augmenté, a cette année légèrement diminué. Le rétablissement d'une revue française dont les fameuses *lois existantes* avaient entraîné la suppression, est la cause à peu près unique de cette diminution. Mais, ici encore, un peu de propagande, faite autour de nous, nous permettrait de nous réjouir du bien qui se fait ailleurs sans avoir à en regretter pour nous-mêmes les conséquences fâcheuses.

Il est ensuite donné lecture du rapport suivant présenté par le Trésorier de la Société.

*Compte détaillé des recettes et des dépenses de l'exercice écoulé du 11 avril 1887 au 31 mars 1888.*

RECETTES.

| | | |
|---|---|---|
| Encaisse au 11 avril 1887. . . . . . . . . . fr. | 52,620 | 13 |
| 439 cotisations . . . . . . . . . . . . . . | 6,585 | » |
| 2 rachats perpétuels . . . . . . . . . . . | 300 | » |
| 791 abonnements à la *Revue des questions scientifiques* . . . . . . . . . . . . . . . . | 13,990 | 60 |
| Coupons du portefeuille . . . . . . . . . . | 2,575 | » |
| Intérêts en banque au 30 juin 1887 . . . . . | 838 | 45 |
| — — au 31 décembre 1887 . . . | 565 | » |
| TOTAL. . . fr. | 77,274 | 18 |

DÉPENSES.

| | | |
|---|---|---|
| Frais de bureau, de banque et de recouvrement, fr. | 381 | 55 |
| — de sessions . . . . . . . . . . . . | 372 | 55 |
| Impression et expédition des *Annales* et des circulaires . . . . . . . . . . . . . . . . | 3,972 | 17 |
| *Revue des questions scientifiques :* | | |
| *a*) Direction et collaboration. . . . . . . | 6,909 | 25 |
| *b*) Impression et expédition . . . . . . . | 7,801 | 44 |
| Indemnité au secrétaire . . . . . . . . . . | 500 | » |
| — aux secrétaires de sections et au secrétaire adjoint . . . . . . . . . . . . . . | 900 | » |
| Subside pour recherches scientifiques . . . . | 500 | » |
| Reliure pour le jubilé du Souverain-Pontife. . . | 313 | 50 |
| Achat de titres . . . . . . . . . . . . . | 29,973 | 80 |
| Encaisse au 1er avril 1888 . . . . . . . . . | 25,649 | 92 |
| TOTAL. . . fr. | 77,274 | 18 |

*Situation du capital au 31 mars 1888.*

CAPITAL SOCIAL.

| | | |
|---|---|---|
| *Actif.* 7,400 francs. Emprunt de l'État belge 3 ½ %, 2e série, à fr. 101,75, intérêts non compris . . . . . | 7,529 50 | |
| 10,000 francs. Emprunt de l'État belge 3 ½ %, 3e série, à fr. 101,80, intérêts non compris . . . . . | 10,180 » | |
| 1,500 francs. Emprunt de l'État belge 3 %, à fr. 92,55, intérêts non compris . . . . . . . . . . | 1,388 25 | |
| 10,000 francs. Obligations de la Caisse d'annuités dues par l'État, à 4 ½ %, à fr. 115,50, intérêts non compris . . . . . . . . . . | 11,550 » | |
| 16,000 francs. Obligations de la Caisse d'annuités dues par l'État, à 3 %, à fr. 91,75, intérêts non compris . . . . . . . . . . | 14,680 » | |
| 50 obligations du chemin de fer Guillaume-Luxembourg, 3 %, à 427 francs, intérêts non compris . | 21,350 » | |
| 145 obligations chemins de fer vicinaux, 3 %, à fr. 106,50, intérêts non compris . . . . . . | 15,442 50 | |
| 30 actions privilégiées du chemin de fer de Bruxelles-Lille-Calais, à fr. 427,50, intérêts non compris . | 12,825 » | |
| | | 94,945 25 |
| *Passif.* 32 parts de fondateur de 500 francs . . . . . . . . . | 16,000 » | |
| 38 rachats perpétuels de 150 fr. . | 5,700 » | |
| | | 21,700 » |
| *Excédent d'actif* . . . fr. | | 73,245 25 |

M. le Président propose à l'assemblée de nommer, pour vérifier le compte rendu du Trésorier, MM. Lagasse et Otto. — Adopté.

Le R. P. Vanden Gheyn fait ensuite une conférence sur cette question : *La race aryenne est-elle originaire de l'Europe?* Depuis quelques années, cette opinion, patronnée par Lytton Bulwer, Latham, Geiger, Benfey et Fick, cherche à s'accréditer dans la science. Les travaux récents de MM. O. Schrader et Penka l'ont popularisée en Allemagne et, au dernier Congrès de l'Association britannique, tenu à Manchester en septembre 1887, MM. Sayce et Taylor l'ont bruyamment défendue. A en croire la nouvelle théorie, le centre de formation des langues aryennes ne serait plus l'Asie, comme on le croyait jadis, mais l'Europe, et en particulier pour MM. Penka, Sayce et Taylor, la Scandinavie.

Le conférencier, qui par de nombreux travaux a cherché depuis longtemps à élucider les problèmes relatifs à l'origine et aux migrations des peuples aryens, s'élève vigoureusement contre la thèse de leur provenance européenne. Après avoir fait l'histoire des principaux systèmes, le P. Vanden Gheyn examine successivement les preuves que l'on fait valoir : arguments linguistiques, anthropologiques, géographiques.

L'école philologique moderne revendique des droits de priorité et d'archaïsme pour les idiomes européens relativement au sanscrit et au zend. C'est là une assertion gratuite, et en tous cas sans portée aucune pour la question d'origine. Mais la grande preuve linguistique est tirée de ce fait que le vocabulaire aryaque primitif révèle des conditions météorologiques qui ne se réalisent que pour l'Europe, une faune et une flore exclusivement européennes. Le P. Vanden Gheyn montre combien toutes ces affirmations sont absolues, et il conclut avec M. de Ujfalvy, qui a exploré à fond les contrées asiatiques que l'on croit avoir été le berceau primitif des Aryas : « Les vallées qui avoisinent le Pamir, le Darwâz, le Karategine et le Kohistan satisfont à toutes les données de la paléontologie linguistique. Il y a là un pays froid, l'été est court. Les plantes alimentaires et les animaux domestiques

sont bien ceux que signale le vocabulaire aryaque. On trouve le pin, le bouleau et le chêne. Les grands fauves n'y vivent pas. »

Mais c'est surtout au nom de l'anthropologie que l'on veut faire les Aryas indigènes en Europe. Et pourquoi? Parce que les Germano-Scandinaves, avec leur crâne allongé, leurs yeux bleus et leur chevelure blonde, reproduisent le type Aryen primordial. Véritable postulatum, comme l'a prouvé le P. Vanden Gheyn, et contre lequel proteste l'anthropologie elle-même, qui a constaté dans la race aryenne le dualisme très prononcé de deux types. Aussi M. Reinach a-t-il pu dire, en visant les travaux de M. Penka, que le P. Vanden Gheyn a surtout réfuté : « Si des études anthropologiques superficielles donnent le goût des synthèses romanesques, des recherches plus approfondies en détournent ou en guérissent. »

Enfin, pour les partisans de la nouvelle théorie, la civilisation néolithique se confondrait avec la civilisation aryenne. Pour M. Penka, il y a parfait accord entre l'âge de la pierre polie en Scandinavie et ce que nous savons de l'état primitif des Aryas. M. Schrader établit des rapports identiques entre les peuples des palafittes de la Suisse et les Aryas. Ce double système n'a pas trouvé grâce devant la critique du P. Vanden Gheyn, qui a pu s'appuyer sur l'approbation entière que lui a donnée M. Max Müller dans un récent ouvrage. « Le P. Vanden Gheyn, dit le savant professeur d'Oxford, a accompli cette tâche de critique avec grande science, avec modération et compétence, et si l'on remet sur le tapis cette théorie de l'origine européenne des Aryas, il est à espérer que les avocats prendront à cœur les leçons que le P. Vanden Gheyn leur donne. »

En terminant, le conférencier exprime la conviction que, malgré les assertions bruyantes des partisans de la nouvelle théorie, malgré le nombre et l'autorité des adhésions qu'ils ont recrutées, malgré la haute consécration donnée à cette opinion par la section d'anthropologie au récent congrès de l'Association britannique, à Manchester, l'hypothèse de la provenance européenne des Aryas ne repose sur aucune preuve péremptoire, et qu'elle n'a pas encore conquis dans la science la place qu'y occupe légitimement

l'opinion beaucoup plus plausible et moins fantaisiste qui établit en Asie le centre de formation et le point de départ des langues indo-européennes.

## IV

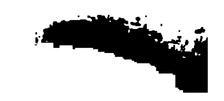
### ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MERCREDI 4 AVRIL 1888.

La conférence de ce jour, *Taillis sous futaie et futaies sur taillis,* a été faite par M. Ch. de Kirwan, ancien inspecteur des forêts en France, et écrivain forestier très estimé.

Il commence sa causerie par une description détaillée d'un taillis sous futaie, en partant d'un taillis simple s'exploitant en coupes annuelles à l'âge de 30 ans, en 1750, et le suivant jusqu'en 1870 et années subséquentes par une série ininterrompue d'opérations ayant pour objet de constituer une gradation normale de réserves de cinq âges différents, espacés de 30 en 30 ans.

Le conférencier examine ensuite les conditions d'exploitabilité des taillis composés au double point de vue des nécessités culturales et du taux de l'intérêt le plus élevé à retirer de la forêt, considérée exclusivement comme un capital. Il indique la nécessité d'adopter un âge relativement élevé pour permettre de réserver un nombre suffisant de futaies au-dessus du taillis, et fait connaître à quels caractères relatifs on peut déterminer l'âge au delà duquel il y aurait pécuniairement, ou mieux *commercialement,* plus de perte que de profit à conserver les futaies sur pied. C'est ce qu'il appelle « l'exploitabilité commerciale ».

La troisième partie de la conférence est consacrée d'abord à une critique de l'exploitabilité commerciale en tant que prise d'une manière exclusive et trop absolue, pour faire voir que la bonne gestion d'un taillis composé demande qu'on ne soit pas trop empressé d'abattre les vieilles futaies tant qu'elles sont bienvenantes. L'orateur expose ensuite ce que c'est que l'exploitabilité *absolue,* qui vise à réaliser la plus grande quantité possible de matière ligneuse, et est essentiellement favorable à la conser-



vation comme à l'amélioration de la propriété forestière. On peut d'ailleurs établir une combinaison de l'exploitabilité absolue avec la commerciale, et obtenir une exploitabilité *mixte*, qui sauvegarde dans une juste mesure et l'intérêt du possesseur actuel et l'intérêt de la forêt elle-même. Enfin, il y a aussi l'exploitabilité économique, qui a pour objet de réaliser les produits les plus spécialement utiles dans une région donnée, et qui peut se combiner aussi avec l'exploitabilité absolue, se confondant d'ailleurs souvent soit avec celle-ci, soit avec l'exploitabilité mixte envisagée au point de vue commercial.

La conclusion est que le propriétaire forestier doit *user* et non *abuser* de son bien; il doit se considérer, tant vis-à-vis de ses héritiers et descendants que de la société elle-même, comme un usufruitier qui doit rendre un jour intacte ou même améliorée la propriété dont il a reçu le dépôt.

La *Revue des questions scientifiques*, dans sa livraison de juillet 1888, a reproduit les principaux développements de cette conférence, sous le titre : *Études forestières : Les taillis sous futaie.*

## V

### ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 5 AVRIL 1888.

Les deux commissaires nommés dans l'assemblée générale du mardi 3 avril, MM. Lagasse et Otto, proposent d'approuver les comptes du Trésorier. Cette proposition est adoptée.

M. X. Stainier fait une conférence sur la géographie de la Belgique pendant les âges géologiques.

Si l'on ne consultait que la physionomie actuelle de la Belgique, son cachet particulier de fixité pourrait nous faire croire qu'elle n'a jamais subi de changements. Nous retrouvons cependant sur ce sol de nombreuses preuves du passage des mers; sa géographie n'a donc pas toujours été ce qu'elle est aujourd'hui. Pour produire des changements de cet ordre, la nature a mis en œuvre



deux puissants agents : d'abord le soulèvement des masses continentales, ensuite l'érosion et la sédimentation des mers. Suivant que l'action de l'un ou de l'autre dominait, la Belgique passait par une phase marine ou par une phase continentale. Deux fois ces phases se sont renouvelées en alternant régulièrement.

Pour éclairer l'historique des grands changements survenus en Belgique, le conférencier expose des cartes indiquant la répartition approximative des mers aux diverses époques.

D'abord la mer recouvrait complètement le pays, et c'est dans ses eaux que la vie faisait sa première apparition. Cette vie prenait bientôt un développement remarquable, tandis que le domaine de la mer diminuait peu à peu. A la surface des continents émergés, la végétation houillère faisait son apparition, ses produits s'accumulaient lentement au fond de l'ancienne mer, donnant ainsi naissance à la première réserve de charbon dont nous jouissons aujourd'hui. Les eaux avaient alors abandonné complètement la Belgique; car, durant cette période continentale, de puissants soulèvements du sol ont donné au pays une physionomie tout à fait alpestre.

Mais les fractures causées par les plissements de l'écorce ont permis aux agents extérieurs, et ultérieurement à l'Océan, de morceler petit à petit ce massif montagneux et de le faire disparaître presque complètement.

Bientôt même la mer envahit de nouveau tout le territoire, et ce ne fut qu'après avoir complètement disparu sous les eaux que les terres recommencèrent à émerger un peu partout. C'est alors que l'Europe vit se former à sa surface presque toutes ses plus hautes montagnes, les Alpes, les Pyrénées, etc. La Belgique semble avoir subi le contre-coup de ces lointaines commotions; aussi on y remarque une lutte prolongée et incessante où la terre ferme finit par l'emporter sur l'Océan. Il ne reste plus alors, pour donner à la Belgique sa physionomie actuelle, qu'à former le système de ses vallées et de ses cours d'eaux. L'homme est d'ailleurs sur la terre à cette époque, et les temps géologiques sont terminés.

Comme conclusion de tous ces changements successifs, le con-

férencier montre que la mer pourrait bien un jour, comme aux âges précédents, venir recouvrir tous nos travaux et nos monuments; mais il ajoute que la science est encore impuissante à prédire d'aussi redoutables changements.

On peut lire cette conférence dans la ***Revue des questions scientifiques***, juillet 1888, sous le titre : ***La géographie du Brabant durant les âges géologiques.***

M. le Président proclame ensuite le résultat des élections (voir, page 41, la composition du Bureau et du Conseil), et déclare la session close.

## LISTE DES OUVRAGES

### OFFERTS A LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

---

Des sépultures dans les dépôts paléolithiques des grottes ou des abris sous roche, par M. E. d'Acy. (Extrait des *Bulletins de la Société d'anthropologie.*) — Paris, 1888.

Anatomische Schriften des Professors Dr Albrecht. — Hamburg, 1886.

Anuario del Observatorio astronómico nacional de Tacubaya para el año de 1889, formado bajo la direcion del ingeniero Angel Anguiano. Año IX. — México, 1888.

Archéologie préhistorique, par le Bon J. de Baye. — Paris, 1888.

Un mot sur la question des chemins de fer en Chine, par M. Alfred Blondel.

Notice sur les plantes fossiles des grès tertiaires de Saint-Saturnin, par M. l'abbé Boulay. (Extrait du *Journal de Botanique.*) — Paris, 1888.

Du rôle social de l'ingénieur. Conférence faite au Cercle industriel des écoles spéciales de l'Université de Louvain, par O. Bustin. — Louvain, 1888.

Recherches théoriques et expérimentales sur les oscillations de l'eau et les machines hydrauliques à colonnes liquides oscillantes, par le Mis Anatole de Caligny. — Paris, 1883.

Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten, von Georg Cantor. (Separatabdruck aus Bd. 91 der *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik.*) — Halle.

Apuntes de astronomia elemental ó cosmografia, por Enrique M. Cappelletti, S. J. — Puebla de los Angeles, 1887.

Resúmen de las observaciones meteorológicas ejecutadas en el Colegio catolico del Sagrado Corazon de Jesus, en Puebla, durante el decenio de 1877 á 1886, por Enrique M. Cappelletti, S. J. — México, 1888.

Cours d'astronomie pratique, par E. Caspari. — Paris, 1888-1889.

Cours de philosophie, par le R. P. A. Castelein. Premier volume. Logique. — Namur, 1887.

Méthode sulfurique de Kjeldahl pour le dosage de l'azote, par Paul Claes. (Extrait du *Bulletin de l'Agriculture.*) — Bruxelles, 1887.

De l'origine et de la fin de la terre et de l'homme, par Jean Crocq. — Bruxelles, 1889.

Food Versus Bacilli in Consumption. An open Letter from Ephraïm Cutter, M. D., LL. D. With Answer. (Extrait de *Virginia Medical Monthly.*) — New York, 1888.

Discours prononcés sur la tombe de M. le docteur E. Schneider, le 6 septembre 1888, par les Drs Dumont et Cuylits. — Bruxelles, 1888.

Le monde vu par les savants du XIXe siècle. Publication périodique, par G. Dallet. — Paris, 1889.

Expériences synthétiques relatives aux météorites. Rapprochements auxquels ces expériences conduisent, tant pour la formation de ces corps planétaires que pour celle du globe terrestre; par M. Daubrée. (Extrait du *Bulletin de la Société géologique de France.*) — Paris, 1866.

Les régions invisibles du globe et des espaces célestes. Eaux souterraines, tremblements de terre, météorites, par A. Daubrée, membre de l'Institut. — Paris, 1888.

L'exactitude et la critique en histoire, d'après un assyriologue. Réponse à M. Sayce, par A. Delattre, S. J. (Extrait du *Muséon.*) — Louvain, 1888.

Bulletin de physique, par J. Delsaulx, S. J. (Extrait de la *Revue des questions scientifiques.*) — Bruxelles, 1889.

Sur la tension électrique suivant les lignes de force dans les milieux diélectriques, par le P. Joseph Delsaulx. (Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles.*) — Bruxelles, 1888.

Sur la théorie cinétique des phénomènes capillaires, par le P. Joseph Delsaulx. (Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles.*) — Bruxelles, 1888.

Recherches sur l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre, par J. M. De Tilly. — Bruxelles, 1887.

Sur les notions de force, d'accélération et d'énergie en mécanique. Discours lu à la séance publique de la classe des sciences de l'Académie royale de Belgique, le 16 décembre 1887, par J. M. De Tilly. — Bruxelles, 1887.

Notice sur François-Léopold Cornet, membre de l'Académie, par G. Dewalque. — Bruxelles, 1889.

Sur quelques Paléchinides, par MM. Louis Dollo et A. Buisseret. — Paris, 1888.

Congrès bibliographique international. L'Apologétique chrétienne. Rapport présenté au congrès de 1888 par le chanoine F. Duilhé de Saint-Projet. — Paris, 1888.

L'origine du français, par l'abbé J. Espagnolle. Tome deuxième. — Paris, 1888.

Les Questions scientifiques, par Jean d'Estienne. (Extrait de la *Revue du monde catholique*, 1er novembre [illegible] et 1er janvier 1889.)

La période glaciaire, par A. Falsan. — Paris, 1889.

Sonnenprotuberanzen vom Jahre 1886, beobachtet und herausgegeben von Julius Fényi, S. J. — Kalocsán, 1888.

Annuaire de l'Observatoire royal de Bruxelles, par F. Folie. — Bruxelles, 1889.

Preuves de la nutation diurne. Détermination approximative de ses constantes, par F. Folie. — Bruxelles, 1888.

Les emprunts d'Homère au Livre de Judith, par M. l'abbé Fourrière. — Paris, 1889.

Un cas de fibrome de la dure-mère spinale, par le docteur Xavier Francotte. (Extrait des *Annales de la Société médico-chirurgicale de Liège.*) — Liège, 1888.

Éléments de neuropathologie générale, par le Dr Xavier Francotte. — Liège, 1889.

Hémiatrophie congénitale de la langue, par le Dr Xavier Francotte. (Extrait des *Annales de la Société médico-chirurgicale de Liège.*) — Liège, 1888.

De l'œdème hydrémique. Mémoire présenté à l'Académie royale de médecine de Belgique par le Dr Xavier Francotte. (Extrait du *Bulletin.*) — Bruxelles, 1888.

La lutte pour l'existence chez les animaux marins, par Léon Fredericq. — Paris, 1889.

Éléments de trigonométrie plane et sphérique, par l'abbé E. Gelin. — Namur, 1888.

Précis de trigonométrie rectiligne, par l'abbé E. Gelin. — Namur, 1888.

Sur les accélérations d'ordre quelconque des points d'un corps solide dont un point est fixe, par M. Ph. Gilbert. — Paris, 1889.

Sur les accélérations d'ordre quelconque dans le mouvement d'une figure plane dans son plan, par M. Ph. Gilbert. — Rome, 1888.

Sur les composantes des accélérations d'ordre quelconque suivant trois directions rectangulaires variables, par M. Ph. Gilbert. (Extrait du *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville.) — Paris, 1888.

Sur la convergence des intégrales à limites infinies, par M. Ph. Gilbert. (Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques.*) — Paris, 1888.

Détermination, en grandeur et en direction, des axes d'une section diamétrale de l'ellipsoïde, par M. Ph. Gilbert. (Extrait de *Mathesis.*) — Gand, 1888.

Groupement et construction géométrique des accélérations dans un solide tournant autour d'un point fixe, par M. Ph. Gilbert. — Paris, 1888.

Haton de la Goupillière, membre de l'Institut. Cours de machines, tome premier, second fascicule, Thermodynamique ; compte rendu par M. Ph. Gilbert. (Extrait de la *Revue des questions scientifiques.*) — Bruxelles, 1889.

Les manuscrits de Galilée et leur histoire, par M. Ph. Gilbert. (Extrait de la *Revue des questions scientifiques.*) — Bruxelles, 1888.

OEuvres de Fourier publiées par les soins de M. Gaston Darboux. Tome premier : Théorie analytique de la chaleur; compte rendu par M. Ph. Gilbert. (Extrait de la *Revue des questions scientifiques.*) — Bruxelles, 1888.

Sur les produits composés d'un grand nombre de facteurs et sur le reste de la série de Binet, par M. Ph. Gilbert. (Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles.*) — Bruxelles, 1886.

Sur les relations entre les coefficients calorimétriques d'un corps, par M. Ph. Gilbert. (Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles.*) — Bruxelles, 1888.

Les stations de l'âge du Renne dans les vallées de la Vézère et de la Corrèze. Documents publiés par le Dr Paul Girod et Élie Massénat. 1er fascicule. — Paris, 1888.

De la longueur d'une ligne, par le lieutenant E. Goedseels. (Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique.*) — Bruxelles, 1888.

L'évaporomètre réfrigérant de L. Legras. Notice, par J. Hahn, S. J. — Verviers, 1888.

Cours de machines, par Haton de la Goupillière, membre de l'Institut. Tome premier, second fascicule, Thermodynamique. — Paris, 1889.

Mémoires publiés par la Société philomathique à l'occasion du centenaire de sa fondation. Transformation propre à conserver le caractère du potentiel cylindrique d'un nombre limité de points, par M. Haton de la Goupillière, membre de l'Institut. — Paris, 1888.

Les étoiles filantes et les bolides, par M. Félix Hément. — Paris, 1888.

Constitution de l'espace céleste, par G.-A. Hirn. — Paris, 1889.

Four Lectures on Anthropology and Biology, by Rev. Thomas Hughes, S. J. : Lecture I. Prehistoric Races. — Lecture II. Actual Races in History. — Lecture III. Species; or, Darwinism. — Lecture IV. Cells; or, Evolution. — Detroit, Mich., 1889.

Rapport sur le gyroscope-collimateur de M. G. Fleuriais, par M. de Jonquières. (Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.*) — Paris, 1886.

Rapport sur le Mémoire présenté à l'Académie par MM. Guyou et Simart, lieutenants de vaisseau, intitulé : « Développements de géométrie du navire, avec application aux calculs de stabilité du navire ». (Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.*) — Paris, 1887.

Théorie élémentaire, d'après les méthodes de Poinsot, du mouvement de la toupie, par M. de Jonquières, membre de l'Académie. — Paris, 1887.

Traité pratique de l'irrigation des prairies, par J. Keelhoff, 2e édition, revue et augmentée. Texte et atlas. — Louvain-Paris, 1888.

Essai d'une théorie rationnelle des sociétés de secours mutuels, par Prosper de Lafitte. — Paris, 1888.

Les levers photographiques et la photographie en voyage, par le Dr Gustave Le Bon. Première partie : Application de la photographie aux levers de monuments et à la topographie. — Seconde partie : Opérations complémentaires des levers photographiques. — Paris, 1889.

De l'hypnotisme. Discours prononcé à l'Académie royale de médecine, le 28 avril 1888, par le Dr Lefebvre. (Extrait du *Bulletin*, 4e série, tome II.) — 1888.

Éléments et méta-éléments. Mémoire lu à la Société chimique de Londres, par William Crookes F. R. S. Traduit par Willy Lewy. — Paris, 1888.

Sur le cours d'histoire des mathématiques de l'Université de Gand, par P. Mansion, à Gand. — Note historique sur la règle de médiation, par P. Mansion, à Gand. (Extraits de *Bibliotheca mathematica*, journal d'histoire des mathématiques, publié par Gustaf Eneström.) — Stockholm, 1888.

Association française pour l'avancement des sciences. Congrès d'Oran, 1888. Réfutation de l'interprétation de la géométrie non euclidienne essayée par M. Beltrami; par M. L.-J.-A. de Commines de Marsilly. — Paris.

Teoría de los errores, por H. Faye. Traducción del francés por Joaquin de Mendizabal Tamborrel. Edición de la Sociedad « Alzate ». — México, 1888.

Gleanings in Science. A series of popular lectures on scientific subjects, by Gerald Molloy, D. D., D. Sc. — London, 1888.

Mouvements et températures de l'atmosphère, par le Mis de Montgrand.

Origine du monde d'après la tradition, ouvrage posthume du chanoine Al. Motais, avec introduction sur la cosmogonie biblique, par Charles Robert. — Paris, 1888.

Bibliographie de Léon XIII, d'après le catalogue idéologique, par F. Nizet. — Bruxelles, 1888.

Note sur un problème d'arithmétique. — Note sur les coniques, par M. Maurice d'Ocagne. (Extrait de *Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas.*)

Sur les cordes communes à une conique et à un cercle de rayon nul : Application à la théorie géométrique des foyers dans les coniques, par M. Maurice d'Ocagne. (Extrait des *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society.*) — 1887.

Sur les péninvariants des formes binaires, par M. Maurice d'Ocagne. (Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles.*) — Bruxelles, 1888.

Recherches micrographiques sur quelques roches de l'île de San Miguel (Açores), par Eugenio Vaz Pacheco do Canto e Castro. — Lisbonne, 1888.

A propos du Canon des éclipses d'Oppolzer. (Extrait de la revue *Ciel et Terre.*) — Bruxelles, 1889.

Encore le Canon des éclipses. Réponse à M. Flammarion, par Ern. Pasquier. (Extrait de la revue *Ciel et Terre.*) — Bruxelles, 1889.

Notice sur les travaux de Théodore d'Oppolzer, avec la liste complète de ses publications, par le Dr Robert Schram. Traduite de l'allemand par le Dr Ernest Pasquier. (Extrait du *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche.*) — Rome, 1888.

De l'unification des heures dans le service des chemins de fer, par Ernest Pasquier. (Extrait des *Mémoires de l'Union des Ingénieurs de Louvain.*) — Bruxelles-Louvain, 1889.

Eskimo of Hudson's Strait, by F. Payne. (Extrait des *Proceedings of Canadian Institute.*) — Toronto, 1889.

Étude bibliographique sur une formule d'Euler, par le P. Théophile Pepin, S. J. (Extrait des *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei.*) — Rome, 1888.

Christophe Colomb, Français, Corse et Calvais. Étude historique sur la patrie du grand amiral de l'Océan, par l'abbé J. Peretti. — Paris-Bastia, 1888.

Report of the Observations of the Total Solar Eclipse of August 29, 1886, made at Carriacou. By the Rev. Perry, S. J., F. R. S. (Extrait des *Proceedings of the Royal Society.*)

La divinité de Jésus-Christ vengée des attaques du rationalisme contemporain, par le P. Fr. A. M. Portmans, des Frères-Prêcheurs. Nouvelle édition. — Louvain, 1888.

Des coordonnées tripolaires, par le P. Augustin Poulain. (Extrait du *Journal de mathématiques spéciales.*) — Paris, 1889.

Mathématiques et mathématiciens, pensées et curiosités recueillies par A. Rebière. — Paris, 1889.

La chaleur animale, par Ch. Richet. — Paris, 1889.

El brigadier Albear. Necrologia, por Don Joaquin Ruiz. (Extrait du *Memorial de Ingenieros del ejército.*) — Madrid, 1887.

Le Canon des éclipses d'Oppolzer. Réponse à une critique de M. Flammarion, par le Dr Robert Schram.

Recueil d'exercices sur la mécanique rationnelle, par A. de Saint-Germain. Deuxième édition. — Paris, 1889.

Résistance des fluides, par M. de Saint-Venant, membre de l'Académie. — Paris, 1887.

Origine paléontologique des arbres cultivés ou utilisés par l'homme, par le Mis G. de Saporta. — Paris, 1888.

Einheitliche Zeit, von D^r Robert Schram. (Extrait du *Wiener Zeitung.*) — Wien, 1886.

Zur Frage der Eisenbahnzeit, von D^r Robert Schram. (Extrait du *Wiener Zeitung.*) — Wien, 1888.

Cours sur les fonctions elliptiques, professé pendant l'année 1887 à la Faculté catholique des sciences de Lyon, par M. le C^te de Sparre. Troisième partie. (Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles.*) — Bruxelles-Paris, 1888.

Cours d'analyse de l'École polytechnique, par Ch. Sturm, membre de l'Institut. Neuvième édition. — Paris, 1888.

Dictionnaire abrégé des sciences physiques et naturelles, par Évariste Thévenin et H. de Varigny. — Paris, 1889.

An Experimental Study on the Influence of Magnetism and Temperature on the Electrical Resistance of Bismuth and its Alloys with Lead and Tin. By Edmond von Aubel. (Extrait du *Philosophical Magazine.*)

Recherches expérimentales sur l'influence du magnétisme sur la polarisation dans les diélectriques, par Edmond Van Aubel. - Deuxième note. (Extraits des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique.*) — Bruxelles, 1885 et 1886.

Sur l'intensité lumineuse des bandes d'absorption des liquides colorés. Note de Ch. Fiévez et Éd. Van Aubel, lue à la Société française de physique, dans la réunion du 15 mars 1889.

Ueber den Einfluss des Magnetismus und der Wärme auf den elektrischen Widerstand des Wismuths und dessen Legirungen mit Blei und Zinn, von Edmond van Aubel. (Extrait de *Repertorium der Physik*, herausgegeben von D^r F. Exner.)

Note sur I. Blanche, ancien consul de France en Syrie, par l'abbé L. Vincent. (Extrait du *Bulletin de la Société botanique de France.*) — Paris.

Congrès bibliographique international, tenu à Paris du 3 au 7 avril 1888. Les progrès de la physique de 1878 à 1888; par M. Aimé Witz. (Extrait du *Compte rendu des travaux.*) — Paris, 1888.

Société industrielle du Nord de la France. Production et vente de l'énergie électrique par les stations centrales; par Aimé Witz. — Lille, 1889.

Manuel pratique de cristallographie, par G. Wyrouboff. — Paris, 1889.

Anales del Museo nacional, República de Costa Rica. Tomo I. Año de 1887. — San José, 1888.

Annales de l'Académie universelle des sciences et des arts industriels, et de la Société scientifique européenne. — Bruxelles, 1889.

Annuaire pour l'an 1889, publié par le Bureau des Longitudes. — Paris.

Annuaire de l'Observatoire municipal de Montsouris pour l'an 1888. — Paris.

Archivos do Museu nacional do Rio de Janeiro. Volume VII. — Rio de Janeiro, 1887.

L'art de l'imprimerie et de toutes les professions qui s'y rattachent. Revue mensuelle. Nos spécimen, 1, 2, 3 et 4. — Bruxelles, 1888.

Biblioteca nazionale centrale Vittorio Emanuele di Roma. Bollettino delle opere moderne straniere acquistate dalle biblioteche pubbliche governative del regno d'Italia. Vol. III, ni 1-6; vol. IV, ni 1, 2. — Roma, 1888-1889.

Bollettino della Società di Naturalisti in Napoli. Serie I, vol. II, anno II, fasc. II. — Napoli, 1888.

Le petit Bouquiniste de l'Est. Revue-catalogue. No 2, mars 1889. — Langres.

Congrès scientifique international des catholiques. Bulletin de la Commission de permanence, paraissant tous les trois mois. Nos 1 et 2. — Paris, 1888-1889.

Giornale della Società di letture e conversazioni scientifiche di Genova. Anno IX, ottobre 1886. Anno X, maggio 1887. — Genova, 1887.

Haynald-Observatorium. I. füzet. 1886. Protuberantiæ solares. — II. füzet. 1886. Maculæ solares. — III. füzet. 1887. Meteorologica.

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo Dr F. Gomes Teixeira. Vol. IX, no 1. — Coimbra, 1889.

Le manuel des questions actuelles. Premier supplément au no de janvier 1889. S. S. Léon XIII. Du respect et de l'obéissance dus aux Évêques. — Paris, 1889.

Le manuel des questions actuelles. Premier supplément au no de février 1889. Enseignement des douze Apôtres. — Paris, 1889.

Missions en Chine et au Congo. No 1, février 1889. — Bruxelles.

Le Naturaliste, revue illustrée des sciences naturelles. 10e année, 2e série, no 30, 1er juin 1888. — Paris.

Observaciones magnéticas y meteorológicas del real Colegio de Belen de la Compañia de Jesus en la Habana. Année 1886. — Habana, 1887-1888.

Observaciones meteorologicas del Colegio catolico del Sagrado Corazon de Jesus en Puebla. Año de 1886. — 1887.

Observatorio meteorológico-magnético central de México. Boletin mensual. Tomo I, num. 6-10.

Répertoire bibliographique des sciences mathématiques.

Reports from the Laboratory of the Royal College of Physicians, Edinburgh. Vol. I. — Edinburgh and London, 1889.

Resumen de agricultura, revista teórico-práctica. Año I, cuadernos 1-4. — Barcelona, 1889.

Revue de l'aéronautique théorique et appliquée, publication trimestrielle. 1re année, 2e, 3e, 4e livraisons. 2e année, 1re livraison. — Paris, 1888-1889.

Revue bibliographique belge, rédigée par une réunion d'écrivains, suivie d'un Bulletin bibliographique international publié par la Société belge de librairie. — Bruxelles, 1889.

Revue des religions. No 1, mars 1889. — Paris.

Revue de la science nouvelle. Nos 7, 16-19. — Paris.

Revue des sciences et des lettres. Octobre 1888. — Paris.

Samedi-Revue, 1re année, 1888, nos 34-37. — Paris.

Secretaría de Instrucción pública de la República de Costa Rica. Boletin trimestrial del Instituto meteorologico nacional. Nos 1-3. — San José, 1888.

Stonyhurst College Observatory. Results of Meteorological and Magnetical Observations, 1887.

L'Université Catholique, antérieurement La Controverse et le Contemporain. Revue mensuelle, nouvelle série, tome I. — Lyon, 1889.

University Studies, published by the University of Nebraska. Vol. I, no 1. — Lincoln, 1888.

Verhandlungen des deutschen wissenschaftlichen Vereins zu Santiago. 5. Heft. — Valdivia, 1887.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

## SECONDE PARTIE

# MÉMOIRES

## COURS
## SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES

PROFESSÉ

PENDANT L'ANNÉE 1887 A LA FACULTÉ CATHOLIQUE DES SCIENCES DE LYON

PAR

**M. le C$^{te}$ de SPARRE**

Professeur aux Facultés catholiques de Lyon.

### TROISIÈME PARTIE.

J'ai dans le cours de l'année dernière donné quelques-unes des principales propriétés de ces fonctions, mais ayant laissé complètement de côté un certain nombre de points sur lequels je crois utile de revenir, je rappelle que cette année, aussi bien que l'année dernière, je m'adresse aux personnes qui ayant déjà commencé l'étude des fonctions *sn, cn, dn* de Jacobi désirent se mettre au courant de celles de M. Weierstrass. Quant à ceux qui se proposeraient d'étudier directement les fonctions de M. Weierstrass, ou désireraient pousser leur étude plus loin qu'il ne me sera possible de le faire dans ces quelques leçons, je ne puis que leur conseiller l'étude de l'important ouvrage publié sur ce sujet par M. Halphen. Ils y trouveront la théorie de ces fonctions exposée avec le talent que cet éminent géomètre sait mettre dans tous ces travaux.

I. — *Réduction aux fonctions* p(u) *des intégrales qui dépendent des fonctions elliptiques, lorsque les intégrales ont été ramenées au préalable à la forme canonique.*

J'ai déjà indiqué l'année dernière un moyen de faire cette réduction lorsque l'intégrale a la forme canonique

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-kx^2)}},$$

en posant

$$x^2 = \frac{z}{k^2} + \frac{1+k^2}{3k^2}.$$

Cette manière d'opérer présente toutefois un inconvénient, si dans l'intégrale primitive $x^2$ est compris entre 0 et 1, parce que la valeur $z = \infty$ correspond à une valeur de $x$ qui n'est pas comprise dans ces limites.

Il est préférable dans ce cas de poser

$$x^2 = \frac{1}{a+z} \quad \text{d'où} \quad dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{(a+z)^{\frac{3}{2}}},$$

de sorte que si l'on a

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

il vient

$$u = \int_\infty^z \frac{-dz}{2\sqrt{(a+z)(z+a-1)(z+a-k^2)}}$$

et en posant

$$3a - (1+k^2) = 0,$$

d'où

$$a = \frac{1+k^2}{3},$$

$$u = \int_\infty^z \frac{-dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

où

$$g_2 = 4\left[a(k^2 - a) + a(1-a) - (1-a)(k^2-a)\right],$$
$$g_3 = -4(1-a)(k^2-a)a.$$

C'est-à-dire en tenant compte de la valeur donnée plus haut de $a$

(1) . . . $g_2 = \frac{4}{3}(1 - k^2 + k^4),$

(2) . . . $g_3 = -\frac{4}{27}(1 + k^2)(2 - k^2)(2k^2 - 1).$

Comme d'ailleurs

$$z = \frac{1}{x^2} - a,$$

en posant

$$z = p(u), \qquad x = \operatorname{sn} u,$$

on a bien

(3) . . . . . . . $p(u) = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} - \frac{1 + k^2}{3}.$

C'est bien la valeur que nous avions trouvée pour $p(u)$ lorsque l'on suppose, ainsi que cela a lieu ici, le multiplicateur égal à l'unité.

On passe d'ailleurs bien facilement de ce cas à celui où le multiplicateur est quelconque, en se basant sur la relation d'homogénéité établie dans le cours de l'an passé.

$$\gamma^2 p(u, g_2, g_3) = p\left(\frac{u}{\gamma}, \gamma^4 g_2, \gamma^6 g_3\right) \text{ (*)},$$

d'où l'on déduit en posant

$$\frac{u}{\gamma} = u_1,$$

(4) . . . . . . . . . . $\gamma^4 g_2 = g_2',$

(5) . . . . . . . . . . $\gamma^6 g_3 = g_3',$

$$p(u_1, g_2', g_3') = \gamma^2 p(\gamma u_1, g_2, g_3),$$

(*) Première partie du cours, page 47.

ou en vertu de la relation (3)

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad p(u_1, g'_2, g'_3) = \gamma^2 \left[ \frac{1}{\mathrm{sn}^2 \gamma u_1} - \frac{1 + k^2}{3} \right].$$

De sorte qu'en supprimant maintenant les accents de $g'_2$ et $g'_3$ et l'indice de $u_1$ on a, en vertu des relations (4), (5) et (6),

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad p(u) = \gamma^2 \left[ \frac{1}{\mathrm{sn}^2 \gamma u} - \frac{1 + k^2}{3} \right],$$

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad g_2 = \frac{4}{3} \gamma^4 (1 - k^2 + k^4),$$

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad g_3 = -\frac{4}{27} \gamma^6 (1 + k^2)(2 - k^2)(2k^2 - 1).$$

Ce sont bien là les formules auxquelles nous étions arrivé directement par le moyen du théorème de M. Hermite.

Mais la réduction par le procédé que nous venons d'indiquer suppose que l'on ait mis en évidence les racines de la quantité sous le radical, ou tout au moins, s'il y a des racines imaginaires, que l'on ait pu opérer la décomposition de cette fonction sous le radical, en facteurs du second degré réels. Or l'un des avantages des fonctions $p(u)$ est que la réduction peut se faire, sans qu'il soit nécessaire de mettre en évidence les racines de la quantité sous le radical ; nous allons donc exposer une méthode qui permet d'arriver à ce but.

Cette méthode est empruntée à un opuscule sur les fonctions elliptiques publié à Helsingfors en 1876 par M. Mittag-Leffler. Nous l'avons toutefois complétée en exposant d'abord un cas particulier qui conduit à des formules, en général un peu plus simples, qui sont celles données par M. Halphen dans son traité.

**II. — *Réduction directe des intégrales dépendant des fonctions elliptiques aux fonctions* p(u) *lorsque les racines de la quantité sous le radical ne sont pas en évidence***

Soit l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'}}.$$

Considérons la transformation suivante :

$$(1)\qquad (ax^2 + bx + c)y^2 + (a'x^2 + b'x + c')y + a''x^2 + b''x + c'' = 0,$$

que nous pouvons écrire aussi

$$(1')\qquad (ay^2 + a'y + a'')x^2 + (by^2 + b'y + b'')x + cy^2 + c'y + c'' = 0.$$

On en tire, en la résolvant par rapport à $y$ puis par rapport à $x$,

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &2(ax^2 + bx + c)y + a'x^2 + b'x + c' \\ &= \sqrt{(a'x^2 + b'x + c')^2 - 4(ax^2 + bx + c)(a''x^2 + b''x + c'')}, \end{aligned} \right.$$

$$(2')\quad \left\{ \begin{aligned} &2(ay^2 + a'y + a'')x + by^2 + b'y + b'' \\ &= \sqrt{(by^2 + b'y + b'')^2 - 4(ay^2 + a'y + a'')(cy^2 + c'y + c'')}. \end{aligned} \right.$$

Si nous posons maintenant pour simplifier l'écriture

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &L = ax^2 + bx + c, \quad M = a'x^2 + b'x + c', \quad N = a''x^2 + b''x + c'', \\ &L_1 = ay^2 + a'y + a'', \quad M_1 = by^2 + b'y + b'', \quad N_1 = cy^2 + c'y + c'', \end{aligned} \right.$$

les équations (2) et (2') s'écriront

$$(4)\qquad 2Ly + M = \sqrt{M^2 - 4LN},$$

$$(4')\qquad 2L_1x + M_1 = \sqrt{M_1^2 - 4L_1N_1},$$

Si nous différentions maintenant l'équation (1) on aura

$$\left[2(ay^2 + a'y + a'')x + by^2 + b'y + b''\right]dx$$
$$+ \left[2(ax^2 + bx + c)y + a'x^2 + b'x + c'\right]dy = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$(2L_1x + M_1)dx + (2Ly + M)dy = 0,$$

ou

$$\frac{dx}{2Ly + M} = \frac{-dy}{2L_1x + M_1},$$

c'est-à-dire en tenant compte de (4) et (4'),

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad \frac{dx}{\sqrt{M^2 - 4LN}} = \frac{-dy}{\sqrt{M_1^2 - 4L_1N_1}}.$$

Posons maintenant

$$(6) \quad \ldots \quad \begin{cases} R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A', \\ R_1(y) = 4y^3 - g_2y - g_3. \end{cases}$$

Notre problème sera résolu, si nous pouvons disposer de $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$, $a''$, $b''$, $c''$ de façon que l'on ait

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} M^2 - 4LN = k^2R(x), \\ M_1^2 - 4L_1N_1 = \alpha k^2R_1(y). \end{cases}$$

$k^2$ et $\alpha$ désignant deux nouvelles constantes.

Mais dans $R_1(y)$ le coefficient du terme en $y^4$ devant être nul, cela exige en vertu de la seconde des équations (7)

$$(8) \quad \ldots\ldots\ldots \quad b^2 - 4ac = 0.$$

Distinguons maintenant deux cas suivant que $a$ est égal à zéro ou différent de zéro.

*Premier cas :*

$$a = 0.$$

L'équation (8) donne alors $b = 0$ et la quantité L se réduit à une constante.

Nous poserons donc

$$L = 1.$$

Car on peut, sans nuire à la généralité de la transformation qui nous sert de point de départ, diviser tous ses coefficients par l'un quelconque d'entre eux différent de zéro.

On déduit alors de la première des équations (7)

$$(9) \quad N = \frac{M^2 - k^2 R(x)}{4}.$$

Dans le second membre les coefficients de $x^4$ et $x^3$ devront être nuls, ce qui donne, en tenant compte des équations (3),

$$(10) \quad \begin{cases} a'^2 - k^2 A = 0, \\ 2a'b' - 4k^2 B = 0. \end{cases}$$

Posons maintenant pour simplifier les calculs, $g$ et $h$ désignant deux nouvelles constantes,

$$a' = -\frac{A}{g}, \quad c' = -\frac{h}{g}.$$

On aura alors au moyen des équations (10)

$$(11) \quad k^2 = \frac{A}{g^2}; \quad b' = -\frac{2B}{g}$$

et l'on en déduit

$$(12) \quad M = -\frac{1}{g}(Ax^2 + 2Bx + h).$$

Puis en vertu des équations (9) et (11)

$$(12) \quad N = \frac{1}{4g^2}\left[(4B^2 + 2hA - 6AC)x^2 + 4(Bh - AB')x + h^2 - AA'\right],$$

équations auxquelles on doit joindre celle obtenue plus haut

(12) . . . . . . . . . $L = 1.$

Mais les équations (1) et (1') peuvent s'écrire

$$Ly^2 + My + N = L_1x^2 + M_1x + N_1,$$

et en tenant compte des relations (12) on en déduit

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} L_1 &= -\frac{A}{g}y + \frac{2B^2 + hA - 3AC}{2g^2}, \\ M_1 &= -\frac{2B}{g}y + \frac{Bh - AB'}{g^2}, \\ N_1 &= y^2 - \frac{h}{g}y + \frac{h^2 - AA'}{4g^2}. \end{aligned} \right.$$

Mais en vertu de la seconde des équations (7) on a

$$(14) \quad M_1^2 - 4L_1N_1 = \alpha k^2 R_1(y) = \frac{\alpha A}{g^2}(4y^3 - g_2y - g_3).$$

En égalant d'abord dans les deux membres les coefficients de $y^2$ et de $y^3$ il vient

$$\frac{4A}{g} = \frac{4A\alpha}{g^2},$$

$$\frac{4B^2}{g^2} - \frac{4Ah}{g^2} - 2\frac{2B^2 + Ah - 3AC}{g^2} = 0.$$

D'où

$$g = \alpha, \quad h = C,$$

en tenant compte de ces relations, les équations (13) prendront la forme suivante :

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} L_1 &= -\frac{A}{\alpha}y + \frac{B^2 - AC}{\alpha^2}, \\ M_1 &= -\frac{2B}{\alpha}y + \frac{BC - AB'}{\alpha^2}, \\ N_1 &= y^2 - \frac{C}{\alpha}y + \frac{C^2 - AA'}{4\alpha^2}, \end{aligned} \right.$$

en égalant alors dans (14) les coefficients de $y$ et les termes constants on aura

$$(16) \ldots \quad \begin{cases} g_2 = \dfrac{1}{\alpha^2}[AA' + 3C^2 - 4BB'], \\ g_3 = \dfrac{1}{\alpha^3}[2BB'C + AA'C - AB'^2 - A'B^2 - C^3]. \end{cases}$$

L'équation (4') donnera d'ailleurs

$$x = -\frac{M_1}{2L_1} + \frac{\sqrt{M_1^2 - 4L_1N_1}}{2L_1}.$$

C'est-à-dire en tenant compte des équations (14) et (15)

$$x = \frac{2By - \frac{1}{\alpha}(BC - AB') + \sqrt{A\alpha}\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}}{-2Ay + \frac{2}{\alpha}(B^2 - AC)}.$$

Si nous faisons maintenant $\alpha = A$ on pourra, en faisant quelques réductions, écrire l'équation précédente comme il suit :

$$x = -\frac{B}{A} + \frac{1}{2}\,\frac{-\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3} - \dfrac{A^2B' - 3ABC + 2B^3}{A^3}}{y - \dfrac{B^2 - AC}{A^2}}.$$

L'équation (5) devient d'ailleurs

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{-dy}{\sqrt{A}\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}}.$$

La réduction se trouve donc faite, car en posant

$$y = p(u),$$

on a

$$(17) \ldots\ldots \quad \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{du}{\sqrt{A}} \text{ (*)},$$

et

$$(18) \ldots \quad x = -\frac{B}{A} + \frac{1}{2} \frac{p'(u) - \dfrac{A^2B' - 3ABC + 2B^3}{A^3}}{p(u) - \dfrac{B^2 - AC}{A^2}}.$$

Mais si l'on pose

$$p(v) = \frac{B^2 - AC}{A^2},$$

comme dans le cas présent

$$g_2 = \frac{AA' + 3C^2 - 4BB'}{A^2}, \qquad g_3 = \frac{2BB'C + AA'C - AB'^2 - A'B^2 - C^3}{A^3}.$$

On aura

$$p'^2(v) = 4p^3(v) - g_2 p(v) - g_3$$

$$= 4\frac{(B^2 - AC)^3}{A^6} - \frac{B^2 - AC}{A^4}(AA' + 3C^2 - 4BB')$$

$$- \frac{2BB'C + AA'C - AB'^2 - A'B^2 - C^3}{A^3}$$

$$= \frac{4B^6 - 12ACB^4 + 4A^2B'B^3 + 9A^2C^2B^2 - 6A^3B'CB + A^4B'^2}{A^6},$$

ou en réduisant

$$p'^2(v) = \left(\frac{A^2B' - 3ABC + 2B^3}{A^3}\right)^2,$$

(*) Nous prenons

$$du = \frac{-dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}},$$

parce que lorsque $u$ croît à partir de 0, $y$ décroît à partir de $+\infty$.

de sorte que l'on peut poser en même temps

$$p(v) = \frac{B^2 - AC}{A^2}, \quad p'(v) = \frac{A^2B' - 3ABC + 2B^3}{A^3}$$

et l'équation (18) deviendra alors

$$(18') \quad \ldots\ldots \quad x = -\frac{B}{A} + \frac{1}{2}\frac{p'(u) - p'(v)}{p(u) - p(v)}.$$

Les formules (17), (18) et (18') que nous venons d'obtenir s'appliquent dans tous les cas, seulement si $A < 0$ elles conduisent à prendre une valeur imaginaire pour $u$ lorsque $x$ et $\sqrt{R(x)}$ sont réels. Si l'on veut pouvoir toujours prendre une valeur réelle pour $u$ lorsque $x$ et $\sqrt{R(x)}$ le sont, il faut avoir recours au deuxième cas de la formule de réduction, celui où $a \gtrless 0$.

*Deuxième cas :*

$$a \gtrless 0,$$

L devant toujours être carré parfait à cause de la relation

$$(8) \quad \ldots\ldots\ldots \quad b^2 - 4ac = 0,$$

nous prendrons

$$(19) \quad \ldots\ldots\ldots \quad L = (x - x_0)^2,$$

car comme par hypothèse $a \lessgtr 0$ nous pouvons, sans nuire à la généralité de la transformation (1), prendre ici

$$a = 1.$$

On déduit encore dans ce cas de la première des équations (7)

$$(20). \quad \ldots\ldots\ldots \quad N = \frac{M^2 - k^2R(x)}{4L}$$

et cette relation fait voir que dans le second membre le numérateur est divisible par $(x - x_0)^2$.

Posons

(21) $R(x)=r_0+4r_1(x-x_0)+6r_2(x-x_0)^2+4r_3(x-x_0)^3+r_4(x-x_0)^4,$

où l'on a

(22) $$\begin{cases} r_0 = R(x_0) = Ax_0^4 + 4Bx_0^3 + 6Cx_0^2 + 4B'x_0 + A', \\ r_1 = \frac{1}{4}\frac{dr_0}{dx_0} = Ax_0^3 + 3Bx_0^2 + 3Cx_0 + B', \\ r_2 = \frac{1}{12}\frac{d^2r_0}{dx_0^2} = \frac{1}{3}\frac{dr_1}{dx_0} = Ax_0^2 + 2Bx_0 + C, \\ r_3 = \frac{1}{24}\frac{d^3r_0}{dx_0^3} = \frac{1}{2}\frac{dr_2}{dx_0} = Ax_0 + B, \\ r_4 = \frac{1}{24}\frac{d^4r_0}{dx_0^4} = \frac{dr_3}{dx_0} = A, \end{cases}$$

posons en même temps

$$M = m_0 + m_1(x-x_0) + m_2(x-x_0)^2.$$

En égalant à 0 dans le numérateur du second membre de l'équateur (20) le coefficient de $x - x_0$ et le terme constant on aura

$$m_0^2 - k^2r_0 = 0, \quad 2m_0m_1 - 4k^2r_1 = 0.$$

Posons maintenant, en désignant par $h$ et $g$ deux nouvelles constantes,

$$m_0 = -\frac{r_0}{g}, \quad m_2 = -\frac{h}{g}.$$

On aura alors

$$k^2 = \frac{r_0}{g^2}, \quad m_1 = -\frac{2r_1}{g},$$

de sorte qu'il vient

(23) $$\begin{cases} M = -\frac{1}{g}\left[r_0 + 2r_1(x-x_0) + h(x-x_0)^2\right], \\ N = \frac{1}{4g^2}\left[4r_1^2 + 2r_0h - 6r_0r_2 + 4(x-x_0)(r_1h - r_0r_3) + (x-x_0)^2(h^2 - r_0r_4)\right], \\ L = (x-x_0)^2. \end{cases}$$

Nous écrirons maintenant les équations (1) et (1′) de la manière suivante :

(24) $Ly^2+My+N=L_1x^2+M_1x+N_1=L'(x-x_0)^2+M'(x-x_0)+N'=0,$

$L'$, $M'$, $N'$ étant des fonctions de $y$ et $x_0$ définies par la dernière des relations précédentes, c'est-à-dire que l'on a

$$L_1=L', \quad M_1=M'-2L'x_0, \quad N_1=N'+L'x_0^2-M'x_0.$$

On déduit de là

(25) . . . . $M_1^2-4L_1N_1=M'^2-4L'N'$

(ce qui est d'ailleurs une propriété bien connue).

En vertu des valeurs (23) de M, N, L, l'équation (24) donnera

(26) . . . $$\left\{\begin{aligned} L' &= y^2-\frac{h}{g}y+\frac{h^2-r_0r_4}{4g^2}, \\ M' &= -\frac{2r_1}{g}y+\frac{r_1h-r_0r_3}{g^2}, \\ N' &= -\frac{r_0}{g}y+\frac{2r_1^2+r_0h-3r_0r_2}{2g^2}. \end{aligned}\right.$$

On a, d'ailleurs, par suite de la relation (25),

$$M'^2-4L'N'=\alpha k^2R_1(y)=\frac{\alpha r_0}{g^2}(4y^3-g_2y-g_3)$$

et on en déduit d'abord

(27) . . . . . . $g=\alpha, \qquad h=r_2$

en égalant dans les deux membres les coefficients de $y^3$ et $y^2$, puis en tenant compte de ces relations (27) et égalant le coefficient de $y$ et le terme constant

$$g_2=\frac{1}{\alpha^2}(3r_2^2+r_0r_4-4r_1r_3),$$

$$g_3=\frac{1}{\alpha^3}(r_0r_2r_4+2r_1r_2r_3-r_0r_3^2-r_1^2r_4-r_2^3).$$

Mais par suite des relations (22)

$$\frac{dr_0}{dx_0} = 4r_1, \quad \frac{dr_1}{dx_0} = 3r_2, \quad \frac{dr_2}{dx_0} = 2r_3, \quad \frac{dr_3}{dx_0} = r_4, \quad \frac{dr_4}{dx_0} = 0$$

on a

$$\frac{dg_2}{dx_0} = \frac{1}{\alpha^2}\left[6r_2\frac{dr_2}{dx_0} + r_0\frac{dr_4}{dx_0} + r_4\frac{dr_0}{dx_0} - 4r_1\frac{dr_3}{dx_0} - 4r_3\frac{dr_1}{dx_0}\right] = 0$$

et d'une façon toute semblable

$$\frac{dg_3}{dx_0} = 0.$$

Donc $g_2$ et $g_3$ étant indépendants de $x_0$ on peut, pour le calculer, faire $x_0 = 0$ et alors en vertu des relations (22)

$$(28) \quad . \quad . \quad \begin{cases} g_2 = \dfrac{1}{\alpha^2}(3C^2 + AA' - 4BB'), \\ g_3 = \dfrac{1}{\alpha^3}(AA'C + 2BCB' - A'B^2 - AB'^2 - C^3). \end{cases}$$

Ce sont les mêmes valeurs que celles trouvées plus haut.

Si l'on tient compte maintenant des relations (27), on aura

$$L' = y^2 - \frac{r_2}{\alpha}y + \frac{r_2^2 - r_0r_4}{4\alpha^2} = \left(y - \frac{r_2}{2\alpha}\right)^2 - \frac{r_0r_4}{4\alpha^2},$$

$$M' = -\frac{2r_1}{\alpha}y + \frac{r_1r_2 - r_0r_3}{\alpha^2} = -\frac{2r_1}{\alpha}\left(y - \frac{r_2}{2\alpha}\right) - \frac{r_0r_3}{\alpha^2}.$$

On déduit d'ailleurs des équations (22)

$$r_2 = Ax_0^2 + 2Bx_0 + C,$$

$$r_2^2 - r_0r_4 = 4(B^2 - AC)x_0^2 + 4(BC - B'A)x_0 + C^2 - AA',$$

$$r_1 = Ax_0^3 + 3Bx_0^2 + 3Cx_0 + B',$$

$$r_1r_2 - r_0r_3 = 2(B^2 - AC)x_0^3 + 3(BC - AB')x_0^2 + (3C^2 - 2BB' - AA')x_0 + CB' - BA'.$$

L'équation (24) donnera ensuite

$$(30) \quad . \quad . \quad x = x_0 - \frac{M'}{2L'} + \frac{\sqrt{\frac{r_0}{\alpha}}\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}{2L'}$$

et l'équation (5) devenant

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{-dy}{\sqrt{\alpha}\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}},$$

la réduction sera faite si l'on pose

$$y = p(u),$$

car on aura alors

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{du}{\sqrt{\alpha}}.$$

On pourra d'ailleurs toujours choisir $x_0$ de façon que l'on ait

$$r_0 = R(x_0) > 0.$$

Si l'une des racines de R $(x)$ est en évidence, en prenant pour $x_0$ cette racine, on a

$$r_0 = 0,$$
$$x = x_0 - \frac{M'}{2L'}.$$

Mais dans ce cas

$$L' = \left(y - \frac{r_2}{2\alpha}\right)^2, \quad M' = -\frac{2r_1}{\alpha}\left(y - \frac{r_2}{2\alpha}\right)$$

et par suite

$$x = x_0 + \frac{r_1}{\alpha\left(y - \frac{r_2}{2\alpha}\right)}$$

ou en remplaçant $y$ par $p\ (u)$

$$(30') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x = x_0 + \frac{r_1}{\alpha\left[p(u) - \frac{r_2}{2\alpha}\right]},$$

d'où l'on déduit

$$(30'') \ldots\ldots \quad \frac{dx}{du} = \frac{-r_1 p'(u)}{\alpha\left[p(u) - \frac{r_2}{2\alpha}\right]^2}.$$

Dans le cas où $x_0$ est quelconque, si au lieu de résoudre l'équation (24) par rapport à $x$ on la résout par rapport à $y$, on aura en prenant de plus

$$\alpha = 1,$$

$$(31) \ldots \quad y = \frac{-\mathrm{M} + k\sqrt{\mathrm{R}(x)}}{2\mathrm{L}} = \frac{-\mathrm{M} + \sqrt{r_0}\sqrt{\mathrm{R}(x)}}{2\mathrm{L}}.$$

Mais en tenant compte des équations (27) et de ce que nous avons fait $\alpha = 1$, les équations (23) donneront

$$\mathrm{L} = (x - x_0)^2,$$
$$\mathrm{M} = -r_0 - 2r_1(x - x_0) - r_2(x - x_0)^2.$$

Comme d'ailleurs

$$r_0 = \mathrm{R}(x_0), \qquad r_1 = \frac{1}{4}\mathrm{R}'(x_0), \qquad r_2 = \frac{1}{12}\mathrm{R}''(x_0).$$

La formule (31) donnera, en y remplaçant $y$ par $p(u)$,

$$(32) \quad p(u) = \frac{\sqrt{\mathrm{R}(x_0)}\sqrt{\mathrm{R}(x)} + \mathrm{R}(x_0) + \frac{1}{2}\mathrm{R}'(x_0)(x - x_0)}{2(x - x_0)^2} + \frac{1}{24}\mathrm{R}''(x_0).$$

Mais l'on a

$$\frac{1}{2}\mathrm{R}(x_0) + \frac{1}{2}\mathrm{R}'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{12}\mathrm{R}''(x_0)(x - x_0)^2$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{R}(x) - 2(x - x_0)^2\left[\frac{1}{12}\mathrm{R}''(x_0) + \frac{1}{24}\mathrm{R}'''(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{96}\mathrm{R}^{\text{IV}}(x_0)(x - x_0)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{R}(x) - 2(x - x_0)^2\left[\frac{\mathrm{A}}{4}(x + x_0)^2 + \mathrm{B}(x + x_0) + \mathrm{C}\right].$$

L'équation (32) peut donc s'écrire

$$(33)\quad p(u)=\frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(x_0)}}{x-x_0}\right]^2-\frac{1}{4}A(x+x_0)^2-B(x+x_0)-C.$$

Si $x_0$ était racine de R $(x)$, cette dernière formule deviendrait

$$p(u)=\frac{1}{4}\frac{R(x)}{(x-x_0)^2}-\frac{1}{4}A(x+x_0)^2-B(x+x_0)-C,$$

ou si nous désignons par $x_1$, $x_2$ et $x_3$ les trois autres racines de R $(x)$

$$(33')\quad p(u)=\frac{1}{4}A\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x-x_0)}-\frac{1}{4}A(x+x_0)^2-B(x+x_0)-C.$$

### III. — *Théorème d'addition dans les fonctions* p (u).

On peut remarquer que les formules (32) et (33) contiennent, comme cas particulier, le théorème d'addition dans les fonctions $p(u)$.

Supposons, en effet, que l'on ait

$$R(x)=4x^3-g_2x-g_3,$$

alors

$$A=C=0,\quad B=1,\quad B'=-\frac{1}{4}g_2,\quad A'=-g_3$$

et les formules (32) et (33) du paragraphe précédent donnent l'intégrale générale de l'équation

$$(1)\qquad \frac{-dy}{\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}}+\frac{-dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}=0.$$

Mais si nous posons

$$y=p(u),\quad x=p(z),$$

l'équation (1) devient

$$du + dz = 0$$

ou

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad u + z = v,$$

$v$ désignant une constante.

On tire de l'équation (2)

$$u = v - z.$$

Mais la formule (32) du précédent paragraphe qui donne l'intégrale générale de l'équation (1) devient dans le cas présent, si on y fait $z = 0$ ce qui donne

$$u = v, \qquad x = p(o) = \infty,$$

$$p(v) = \frac{1}{24} \mathrm{R}''(x_0) = x_0,$$

en remplaçant donc $x_0$ par $p$ $(v)$ et $u$ par $v - z$ la formule (32) nous donnera

$$p(v - z) = \frac{[p(z) + p(v)][2p(v)p(z) - \frac{1}{2}g_2] - g_3 + p'(v)p'(z)}{2[p(z) - p(v)]^2};$$

en changeant $z$ en $-z$ on retombe sur le théorème d'addition sous la forme où nous l'avons déjà obtenue (*).

Si nous étions parti de la formule (33), on aurait ce même théorème sous une forme un peu plus facile à retenir.

On aurait en effet

$$p(v - z) = \frac{1}{4}\left[\frac{p'(v) + p'(z)}{p(v) - p(z)}\right]^2 - p(v) - p(z),$$

ou en changeant $z$ en $-z$

$$(3) \quad \ldots \quad p(v + z) = \frac{1}{4}\left[\frac{p'(v) - p'(z)}{p(v) - p(z)}\right]^2 - p(v) - p(z).$$

---

(*) Première partie du Cours (page 59).

Nous avons obtenu dans le paragraphe précédent la formule de réduction

$$(18') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x = -\frac{B}{A} + \frac{1}{2}\frac{p'(u) - p'(v)}{p(u) - p(v)},$$

où

$$p(v) = \frac{B^2 - AC}{A^2},$$

$$p'(v) = \frac{A^2B' - 3ABC + 2B^3}{A^3}.$$

On peut en déduire au moyen du théorème d'addition une expression pour $\frac{dx}{du}$.

On aura en effet

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{2}\frac{p''(u)[p(u) - p(v)] - p'(u)[p'(u) - p'(v)]}{[p(u) - p(v)]^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{[6p^2(u) - \frac{1}{2}g_2][p(u) - p(v)] - 4p^3(u) + g_2 p(u) + g_3 + p'(u)p'(v)}{[p(u) - p(v)]^2}.$$

C'est-à-dire

$$\frac{dx}{du} = \frac{2p(u)[p(u) - p(v)]^2 - [2p(v)p(u) - \frac{1}{2}g_2][p(u) + p(v)] + g_3 + p'(v)p'(u)}{2[p(u) - p(v)]^2},$$

ou en appliquant le théorème d'addition

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{dx}{du} = p(u) - p(u + v),$$

formule qui donne sous une forme très simple l'expression de $\frac{dx}{du}$ lorsque la réduction a été faite par la formule (18').

Les formules que nous avons établies dans le paragraphe précédent permettent de réduire aux fonctions $p(u)$ les intégrales qui dépendent de fonctions elliptiques sans qu'il soit nécessaire de résoudre la quantité sous le radical, mais il faut ensuite pouvoir calculer les périodes. On trouvera dans l'ouvrage de M. Halphen des séries qui donnent le développement des périodes en

fonction des quantités $g_2$ et $g_3$, mais nous allons traiter cette question à un autre point de vue en cherchant à déterminer le module $k$ et le multiplicateur $\gamma$ en fonction de $g_2$ et $g_3$ que l'on appelle les invariants.

### IV. — *Étude des fonctions* p(u) *lorsque le discriminant est négatif.*

Nous avons obtenu dans le cours de l'an passé les expressions (retrouvées par une autre voie dans le premier paragraphe)

$$(1) \ldots\ldots \quad p(u) = \gamma^2\left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2\gamma u} - \frac{1+k^2}{3}\right],$$

$$(2) \ldots\ldots \quad g_2 = \frac{4}{3}\gamma^4(1 - k^2 + k^4),$$

$$(3) \ldots\ldots \quad g_3 = -\frac{4}{27}\gamma^6(1 + k^2)(2 - k^2)(2k^2 - 1).$$

En éliminant $\gamma$ entre ces équations, on a

$$(4) \quad 108g_3^2(1 - k^2 + k^4)^3 - g_2^3(1 + k^2)^2(2 - k^2)^2(2k^2 - 1)^2 = 0.$$

Cette équation, ainsi que nous avons déjà eu occasion de le faire remarquer dans le cours de l'année dernière (*), ne change pas si l'on remplace $k^2$ par l'une des quantités

$$\frac{1}{k^2}, \quad 1 - k^2, \quad \frac{-1 + k^2}{k^2}, \quad \frac{1}{1 - k^2}, \quad \frac{-k^2}{1 - k^2}.$$

Il en résulte que si l'équation (4) en $k^2$ a une racine réelle, elles le seront toutes les six, et dans ce cas il y en aura une, et une seule, dans chacun des intervalles compris entre les sept quantités suivantes

$$-\infty, \quad -1, \quad 0, \quad \tfrac{1}{2}, \quad 1, \quad 2, \quad +\infty.$$

(*) Première partie du Cours (pages 33 et suivantes).

Donc pour que l'équation ait des racines réelles, la condition nécessaire et suffisante est qu'en substituant deux des nombres qui forment les limites de l'un des intervalles on ait des résultats de signes contraires.

Or pour $k^2 = -1$ le premier membre se réduit à

$$108g_3^2 > 0$$

et pour $k^2 = 0$ il se réduit à :

$$4(27g_3^2 - g_2^3).$$

Donc pour que les valeurs de $k^2$ soient réelles, la condition nécessaire et suffisante est que l'on ait

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 > 0.$$

Si cette condition est remplie, on aura deux valeurs de $k^2$ comprises entre 0 et 1, une entre 0 et $\frac{1}{2}$, l'autre entre $\frac{1}{2}$ et 1.

Si $g_3 > 0$, $\gamma$ sera réel si l'on prend pour $k^2$ la valeur comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$, car on aura alors $2k^2 - 1 < 0$ dans (3).

Si $g_3 < 0$, $\gamma$ sera réel si l'on prend pour $k^2$ la valeur comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1, car on a alors $2k^2 - 1 > 0$ dans (3).

La quantité

$$\Delta = g_2^3 - 27g^2,$$

se nomme le discriminant de la fonction $p(u)$, $g_2$ et $g_3$ sont ses invariants.

Il résulte de ce qui précède que si le discriminant est positif, on pourra toujours trouver pour $k$ et $\gamma$ des valeur réelles, celle de $k$ étant de plus comprise entre 0 et 1 ; l'expression (1) de $p(u)$ ne contiendra donc dans ce cas que des quantités réelles.

Si le discriminant $\Delta$ est négatif, les formules (1), (2), (3), (4) s'appliquent encore, seulement dans ce cas on ne peut trouver pour $k$ une valeur réelle ; on est donc conduit à chercher pour le cas de $\Delta < 0$ une autre expression de $p(u)$ ne contenant elle aussi que des quantités réelles.

Pour cela nous allons d'abord faire voir que dans ce cas de $\Delta < 0$, $p(u)$ admet des périodes imaginaires conjuguées.

En effet, comme nous l'avons fait remarquer, les formules (1), (2), (3) et (4) s'appliquent sans changement au cas de $\Delta < 0$, seulement les valeurs de $k$ sont toutes imaginaires.

Posons

$$(5) \qquad \omega_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}, \qquad \omega_1' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}},$$

où

$$k'^2 = 1 - k^2,$$

si $k^2$ est une racine de l'équation (4), les $\frac{1}{2}$ périodes de $p(u)$ sont

$$\omega = \frac{\omega_1}{\gamma}, \quad i\omega' = \frac{i\omega_1'}{\gamma}.$$

Posons maintenant dans l'équation (4)

$$k^2 - k'^2 = x,$$

d'où

$$4k^2k'^2 = (k^2 + k'^2)^2 - (k^2 - k'^2)^2 = 1 - x^2,$$

cette équation (4) devient

$$g_2^3(9 - x^2)^2x^2 - 27g_3^2(3 + x^2)^3 = 0,$$

ou en faisant

$$x^2 = y,$$

$$g_2^3(9 - y)^2y - 27g_3^2(y + 3)^3 = 0.$$

Or si le discriminant $\Delta$ est négatif, cette équation aura toujours une racine réelle négative, car pour $y = 0$ le premier membre est négatif et pour $y = -\infty$ il a un signe contraire à celui de $\Delta$, c'est-à-dire positif.

Soit $-\alpha^2$ cette racine,
on aura

$$k^2 - k'^2 = \alpha i.$$

Comme d'ailleurs

$$k^2 + k'^2 = 1,$$

on en déduit

$$k^2 = \frac{1}{2} + \frac{\alpha i}{2},$$

$$k'^2 = \frac{1}{2} - \frac{\alpha i}{2}.$$

Les valeurs de $k^2$ et $k'^2$ correspondant à cette racine sont donc imaginaires conjuguées et il en sera par suite de même des valeurs de $\omega_1$ et $\omega'_1$ fournies par les équations (5).

On aura donc

$$\omega_1 = a + bi, \quad \omega'_1 = a - bi,$$

$a$ et $b$ étant réels.

Mais les équations (2) et (3) peuvent s'écrire

$$g_2 = \frac{\gamma^4}{3}(3 + x^2),$$

$$g_3 = -\frac{\gamma^6}{27}x(9 - x^2),$$

d'où l'on déduit

$$\gamma^2 = -\frac{9(3 + x^2)g_3}{x(9 - x_2)g_2}.$$

Mais comme ici

$$x = \alpha i,$$

cette valeur devient

$$\gamma^2 = \frac{9(3 - \alpha^2)g_3}{\alpha(9 + \alpha^2)} i = \lambda^2 i,$$

car on peut toujours choisir le signe de $\alpha$ qui est arbitraire de façon que le coefficient de $i$ soit positif.

On pourra prendre alors

$$\gamma = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(1 + i)$$

et par suite

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}}(1-i).$$

On aura donc

$$\omega = \frac{\omega_1}{\gamma} = (a+bi)\frac{1-i}{\lambda\sqrt{2}} = \frac{a+b}{\lambda\sqrt{2}} + \frac{b-a}{\lambda\sqrt{2}}i,$$

$$i\omega' = \frac{i\omega_1'}{\gamma} = (a-bi)\frac{1-i}{\lambda\sqrt{2}}i = (a-bi)\frac{1+i}{\lambda\sqrt{2}} = \frac{a+b}{\lambda\sqrt{2}} - \frac{b-a}{\lambda\sqrt{2}}i.$$

Ce que nous pouvons écrire

$$\omega = \frac{K}{2} + \frac{iK'}{2},$$

$$i\omega' = \frac{K}{2} - \frac{iK'}{2},$$

K et K′ étant réels; on voit donc que dans le cas présent la fonction admet les deux périodes imaginaires conjuguées

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad 2\omega = K + iK', \qquad 2\omega' i = K - iK'.$$

Ce fait peut d'ailleurs s'établir directement de la manière suivante :

Nous avons fait voir dans la première partie du cours (p. 46) que si 2K et $2\omega$ sont les périodes de la fonction $p(u)$ et que si $e_1$, $e_2$ et $e_3$ sont les racines de la quantité sous le radical égalée à 0

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad 4z^3 - g_2 z - g_3 = 0,$$

on a

$$(8) \quad \ldots \quad e_1 = p(K), \qquad e_2 = p(\omega), \qquad e_3 = p(K+\omega)$$

(je mets ici $\omega$ au lieu de $iK'$),
désignons par $e_1$ la racine réelle, et par $e_2$ la racine imaginaire située au-dessus de l'axe des $x$, car dans le cas présent l'équation (7) a une racine réelle et deux imaginaires conjuguées.

Soit $a$ la racine réelle, les deux racines imaginaires seront $-\frac{a}{2}+\beta i$ et $-\frac{a}{2}-\beta i$ puisque la somme des racines est nulle.

Nous avons donc

$$e_1 = a, \quad e_2 = -\frac{a}{2}+\beta i$$

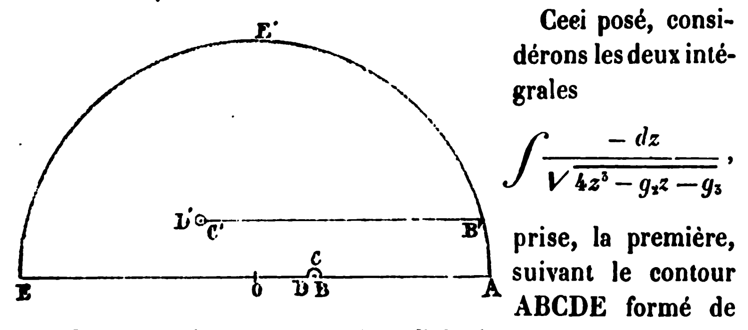
ou

$$a = p(\mathrm{K}) \quad -\frac{a}{2}+\beta i = p(\omega),$$

ces équations peuvent s'écrire

$$\mathrm{K} = \int_{\infty}^{a} \frac{-dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}, \quad \omega = \int_{\infty}^{-\frac{a}{2}+\beta i} \frac{-dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}.$$

Nous supposerons la première intégration effectuée suivant l'axe des $x$ et la deuxième suivant une parallèle aux $x$ positifs à une distance $\beta$ de $ox$.




Ceci posé, considérons les deux intégrales

$$\int \frac{-dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}},$$

prise, la première, suivant le contour ABCDE formé de l'axe des $x$ depuis le point A, dont l'abscisse R est très grande, jusqu'au point B dont l'abcisse est $a+\varepsilon$, $\varepsilon$ étant très petit, du demi-cercle BCD de rayon $\varepsilon$ et de l'axe des $x$ depuis le point D dont l'abscisse est $a-\varepsilon$ jusqu'au point E dont l'abscisse est $-$R ; la deuxième, suivant le contour AB'C'D'C'B'E'E formé d'un demi-cercle de rayon R de A en B' et de B' en E, de la ligne B'C', parallèle à $ox$, parcourue deux fois en sens inverse, et du petit cercle C'D'C' qui enveloppe le point $\left(-\frac{a}{2}+\beta i\right)$ et dont le rayon $\eta$ est très petit. Aucun point critique n'étant compris entre les deux chemins d'intégration, les deux intégrales seront égales.

Or dans la première intégrale la portion correspondant au chemin AB

$$\int_{R}^{a+\varepsilon} \frac{-dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

est réelle et a par définition pour limite K lorsque R croît indéfiniment et que $\varepsilon$ tend vers zéro, et K qui est la première période est réel et positif.

La portion correspondant au petit cercle BCD a pour limite zéro lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro, car en posant $z - a = \varepsilon e^{\varphi i}$ elle se présente sous la forme

$$\int_{0}^{-\pi} A\varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varphi,$$

A étant fini, elle tend donc vers zéro avec $\varepsilon$.

Sur le cercle BCD la quantité

$$\frac{1}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

peut se mettre en posant

$$z - a = \varepsilon e^{\varphi i},$$

sous la forme

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\varphi}{2} i} F(z),$$

F $(z)$ étant fini, et de plus réel et positif lorsque $z$ est réel, de sorte qu'au point D qui correspond à $\varphi = -\pi$ on aura

$$\frac{1}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} = \frac{i}{\sqrt{g_3 + g_2 z - 4z^3}},$$

le second radical étant pris positivement.

Donc la portion de la première intégrale correspondant au chemin DE sera égale à

$$i \int_{a-\varepsilon}^{-R} \frac{-dz}{\sqrt{g_3 + g_2 z - 4z^3}},$$

elle est donc égale à $i$ qui multiplie une quantité réelle et positive, de sorte que lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro et R vers l'infini, elle aura pour limite

$$iK',$$

K' étant réel et positif.

Donc, enfin, la première intégrale a pour limite

$$K + iK',$$

K et K' étant réels et positifs.

Quant à la deuxième intégrale, la portion correspondant au cercle AB'EE' a pour limite 0 lorsque R croît indéfiniment, car pour R très grand cette intégrale est sensiblement égale à

$$\int_0^{-\pi} -\tfrac{1}{2} R^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\varphi i}{2}} i d\varphi,$$

l'intégrale prise le long de B'C' a par définition pour limite $\omega$ lorsque R croît indéfiniment et que $\eta$ tend vers zéro, comme d'ailleurs en tournant autour du point $\left(-\frac{a}{2} + \beta i\right)$, c'est-à-dire en décrivant le petit cercle C'D'C' le radical change de signe, l'intégrale prise le long de C'B' en revenant sera égale à l'intégrale prise en allant de B' en C'; elle aura donc aussi pour limite $\omega$ lorsque $\eta$ tend vers zéro et que R croît indéfiniment; enfin l'intégrale prise le long du petit cercle C'D'C' a pour limite 0 lorsque $\eta$ tend vers zéro (on le verrait absolument comme pour le demi-cercle BCD).

Donc, enfin, la deuxième intégrale a pour limite $2\omega$ lorsque R croît indéfiniment et comme elle est égale à la première on a

$$2\omega = K + iK'.$$

Comme d'ailleurs $p(u)$ admet aussi, d'après ce que nous avons vu, la période 2K, il admettra aussi la période

$$2\omega' i = 2K - 2\omega = K - iK'.$$

On retrouve donc encore par cette voie le résultat obtenu plus haut.

Ceci posé, la fonction $p(u)$ admettant les périodes

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2\omega = K + iK', \qquad 2\omega' i = K - iK',$$

cette fonction admettra aussi les deux périodes

$$2K = 2\omega + 2\omega' i,$$
$$2iK' = 2\omega - 2\omega' i.$$

(Mais ces périodes ne sont pas équivalentes aux premières et ne forment pas un système élémentaire.)

Considérons maintenant la fonction $p(u)$ comme doublement périodique de première espèce avec les périodes $2K$ et $2iK'$ et proposons-nous d'obtenir sa décomposition en éléments simples par le théorème de M. Hermite.

Envisagée à ce point de vue, cette fonction admettra dans le parallélogramme des périodes les deux infinis doubles $0$ et $K + iK'$, elle sera donc du quatrième ordre.

La partie principale du développement sera $\frac{1}{\varepsilon^2}$ pour ces deux infinis (c'est-à-dire aussi bien pour $u = \varepsilon$ que pour $u = K + iK' + \varepsilon$). En effet, le développement de $p(u)$ suivant les puissances ascendantes de $u$ que nous avons obtenu dans le cours de l'an passé (page 49)

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad p(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4,$$

s'applique quel que soit le signe du discriminant, puisqu'il a été obtenu en se basant seulement sur l'équation différentielle qui définit $p(u)$

$$\left(\frac{dp(u)}{du}\right)^2 = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3,$$

équation qui ne suppose rien sur le signe de ce discriminant.

D'autre part, la partie principale du développement pour $u = K + iK' + \varepsilon$ sera la même que pour $u = \varepsilon$, puisque dans le cas qui nous occupe $p(u)$ admet la période $K + iK'$.

On aura donc dans le cas du discriminant négatif

$$p(u) = C - D_1 \frac{H'(u)}{H(u)} - D_2 \frac{\Theta_1'(u)}{\Theta_1(u)}.$$

les fonctions H et $\Theta_1$ étant formées avec les constantes réelles K et K'.

Mais de la formule (première partie du Cours, page 39) (*)

$$D_u \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \gamma^2\left(\frac{J}{K} - k^2 sn^2\gamma u\right),$$

où la fonction $\mathrm{sn}^2\gamma u$ a les périodes 2K et $2i$K'.

On déduira, en changeant $u$ en $u$ + K et $u + i$K'

$$D_u \frac{H'(u)}{H(u)} = D_u \frac{\Theta'(u+iK')}{\Theta(u+iK')} = \gamma^2\left(\frac{J}{K} - \frac{1}{\mathrm{sn}^2\gamma u}\right),$$

$$D_u \frac{\Theta_1'(u)}{\Theta_1(u)} = D_u \frac{\Theta'(u+K)}{\Theta(u+K)} = \gamma^2\left(\frac{J}{K} - \frac{k^2\mathrm{cn}^2\gamma u}{\mathrm{dn}^2\gamma u}\right).$$

On aura donc $C_1$ désignant une nouvelle constante

$$(10) \quad . \; . \; . \quad p(u) = C_1 + \gamma^2\left(\frac{1}{\mathrm{sn}^2\gamma u} + k^2\frac{\mathrm{cn}^2\gamma u}{\mathrm{dn}^2\gamma u}\right).$$

Pour calculer $C_1$ et obtenir en même temps les relations qui lient $\gamma$ et $k$ à $g_2$ et $g_3$, nous égalerons, de part et d'autre, dans l'équation (10), les trois premiers termes du développement des deux membres suivant les puissances ascendantes de $u$.

Le développement de $p(u)$ est donné par la formule (9), quant à celui de $\frac{1}{\mathrm{sn}^2\gamma u}$, en suivant la marche indiquée dans le Cours de l'an passé (première partie, pages 17 et 43) (**) et

(*) Le multiplicateur étant désigné ici par $\gamma$ au lieu de $g$.

(**) D'abord (page 17) dans le développement de $\frac{1}{\mathrm{sn}\, u}$ on aurait calculé $a_6$ par la formule

$$a_6 = -A_7 - a_2A_5 - a_4A_3 = \frac{1+k^2}{6}\left(\frac{1+134k^2+k^4}{4.5.6.7.} - \frac{1+14k^2+k^4}{2.3.4.5}\right.$$
$$\left. + \frac{7-22k^2+7k^4}{3.2.3.4.5}\right) = \frac{1+k^2}{6}\,\frac{31-46k^2+31k^4}{3.4.5.6.7},$$

élevant ensuite $\frac{1}{\mathrm{sn}\, u}$ au carré comme à la page 43 on aura pour le coefficient de $u^4$

$$2(a_2a_4+a_6) = \frac{1+k^2}{3}\left(\frac{7-22k^2+7k^4}{3.4.5.6} + \frac{31-46k^2+31k^4}{3.4.5.6.7}\right) = \frac{(1+k^2)(k^2-2)(2k^2-1)}{189}.$$

calculant un terme de plus que nous ne l'avons fait, on obtient

$$\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u} = \frac{1}{u^2} + \frac{1+k^2}{3} + \frac{1-k^2+k^4}{15}u^2 + \frac{(1+k^2)(k^2-2)(2k^2-1)}{189}u_4 + \cdots$$

On aura ensuite

$$\frac{k^2 \mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 u} = k^2 - \frac{k^2 k'^2 \mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 u},$$

ou, en nous bornant aux termes en $u^4$,

$$\begin{aligned}\frac{k^2 \mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 u} &= k^2 - k^2 k'^2 \left(u^2 - \frac{1+k^2}{3}u^4\right)\left(1 + k^2 u^2\right) \\ &= k^2 - k^2 k'^2 u^2 - k^2 k'^2 \frac{k^2 - k'^2}{3} u^4;\end{aligned}$$

en introduisant de même $k'^2$ dans le développement de $\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u}$, on peut l'écrire de la manière suivante :

$$\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u} = \frac{1}{u^2} + \frac{1+k^2}{3} + \frac{1-k^2 k'^2}{15}u^2 - \frac{(2+k^2 k'^2)(k^2-k'^2)}{189}u^4.$$

Le développement du second membre de l'équation (10) sera donc

$$\begin{aligned}&\frac{1}{u^2} + \mathrm{C}_1 + \gamma^2\left(\frac{1+k^2}{3} + k^2\right) + \frac{1-16k^2k'^2}{15}\gamma^4 u^2 \\ &\qquad - 2\frac{(k^2-k'^2)(1+32k^2k'^2)}{189}\gamma^6 u^4\end{aligned}$$

et en égalant ce développement à celui donné par la formule (9) on a

$$\mathrm{C}_1 = -\gamma^2\left(\frac{1+k^2}{3} + k^2\right),$$

(11). . . . . . $g_2 = \frac{4}{3}\gamma^4(1 - 16k^2k'^2),$

(12). . . . $g_3 = -\frac{8}{27}\gamma^6(k^2 - k'^2)(1 + 32k^2k'^2).$

En tenant compte de la valeur de $C_1$ que nous venons d'obtenir on a alors

$$(13) \quad . \quad . \quad p(u) = \gamma^2 \left[ \frac{1}{\mathrm{sn}^2 \gamma u} - \frac{1+k^2}{3} - \frac{k^2 k'^2 \mathrm{sn}^2 \gamma u}{\mathrm{dn}^2 \gamma u} \right].$$

On vérifie facilement sous cette forme que $p(u)$ admet bien la période $K + iK'$, les fonctions $\mathrm{sn}^2 \gamma u$ et $\mathrm{dn}^2 \gamma u$ qui figurent dans l'expression ayant, elles, les périodes $2K$ et $2iK'$.

## V. — *Calcul de* k *et* $\gamma$ *en fonction de* $g_2$ *et* $g_3$.

***Premier cas :***

$$\Delta > 0.$$

Reportons-nous à l'équation (4) du paragraphe précédent

$$4.27 g_3^2 (1 - k^2 + k^4)^3 - g_2^3 (1 + k^2)^2 (2 - k^2)^2 (2k^2 - 1)^2 = 0$$

et posons

$$\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 = y,$$

elle deviendra

$$4.27 g_3^2 (y - 3)^3 - g_2^3 (2y - 9)^2 y = 0;$$

faisons maintenant

$$y - 3 = z, \qquad 4 \frac{g_2^3 - 27 g_3^2}{27 g_2^3} = a,$$

elle se transforme en

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad : \quad az^3 - z + 1 = 0.$$

Comme ici nous supposons $\Delta > 0$, ce qui exige $g_2 > 0$, on a

$$\frac{4}{27} > a > 0,$$

et notre équation (1) a ses trois racines réelles, une entre 1 et $\frac{3}{2}$, une supérieure à $\frac{3}{2}$ et une négative.

La racine comprise entre 1 et $\frac{3}{2}$ se développerait facilement par la série de Lagrange (*), mais cette série serait parfois peu convergente et je préfère résoudre trigonométriquement l'équation (1).

On sait que dans le cas où, comme ici, les trois racines sont réelles, on peut faire cette résolution en identifiant l'équation proposée avec l'équation qui donne $\cos\frac{\chi}{3}$ en fonction de $\cos\chi$, après que l'on a multiplié les racines de cette dernière équation par un facteur arbitraire $\lambda$, ce qui la transforme dans la suivante :

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \frac{z^3}{\lambda^3} - \frac{3}{4}\frac{z}{\lambda} - \frac{\cos\chi}{4} = 0$$

et elle a alors pour racines

$$z_1 = \lambda\cos\frac{\chi}{3}, \quad z_2 = \lambda\cos\left(120^0 + \frac{\chi}{3}\right), \quad z_3 = \lambda\cos\left(240^0 + \frac{\chi}{3}\right)$$

en identifiant les équations (1) et (2) on a

$$\frac{3}{4}\lambda^2 = \frac{1}{a} \qquad \frac{\lambda^3\cos\chi}{4} = -\frac{1}{a}$$

d'où l'on déduit

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{3a}} \qquad \cos\chi = -\frac{3}{2}\sqrt{3a}.$$

Mais en remplaçant $a$ par sa valeur on a

$$\cos\chi = -\sqrt{1 - \frac{27g_3^2}{g_2^3}}$$

(*) Cette série donnerait

$$z = 1 + a + \frac{6}{2}a^2 + \frac{9.8}{2.3}a^3 + \ldots + \frac{3n(3n-1)\ldots(2n+2)}{2.3\ldots n}a^n \ldots$$

On pourrait aussi développer $k$ par la même série.

Ou en posant

$$(3) \quad \ldots \quad \frac{27g_3^2}{g_2^3} = \sin^2\psi, \quad 0 < \psi < 90°,$$

$$\cos\chi = -\cos\psi$$

c'est-à-dire

$$\chi = 180° - \psi.$$

On aura ensuite

$$\lambda = \frac{3}{\cos\psi}, \quad a = \frac{4}{27}\cos^2\psi,$$

de sorte que les trois racines seront

$$z_1 = 3\,\frac{\cos\left(60° - \frac{\psi}{3}\right)}{\cos\psi}, \quad z_2 = 3\,\frac{\cos\left(180° - \frac{\psi}{3}\right)}{\cos\psi},$$

$$z_3 = 3\,\frac{\cos\left(60° + \frac{\psi}{3}\right)}{\cos\psi} \quad \text{ou} \quad z = 3\,\frac{\cos\mu}{\cos\psi},$$

en désignant par $\mu$ l'un quelconque des trois angles

$$60° - \frac{\psi}{3}, \quad 180 - \frac{\psi}{3}, \quad 60° + \frac{\psi}{3}.$$

Posons maintenant

$$k = \operatorname{tg}\varphi;$$

on aura

$$z + 3 = y = (\operatorname{tg}\varphi + \cot\varphi)^2,$$

ce qui peut s'écrire

$$(\operatorname{tg}\varphi - \cot\varphi)^2 = 4\cot^2 2\varphi = z - 1.$$

Mais en vertu de l'équation (1)

$$z - 1 = az^3 = \frac{4\cos^3\mu}{\cos\psi},$$

d'où enfin

$$(4). \dots \dots \quad \cot 2\varphi = \sqrt{\frac{\cos^3 \mu}{\cos \psi}}$$

ou

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \sqrt{\frac{\cos \psi}{\cos^3 \mu}}.$$

Il faut maintenant calculer $\gamma$.

Nous avons pour cela les deux équations

$$(5) \dots \dots \quad g_2 = \frac{4}{3}\gamma^4(1 - k^2 + k^4),$$

$$(6) \dots \quad g_3 = -\frac{4}{27}\gamma^6(1 + k^2)(2 - k^2)(2k^2 - 1).$$

Nous remarquerons d'abord que lorsque l'on donne à $\mu$ les trois valeurs

$$60° - \frac{\psi}{3}, \quad 180° - \frac{\psi}{3}, \quad 60° + \frac{\psi}{3}$$

on obtiendra pour $\varphi$ deux valeurs réelles comprises entre 0 et 45°; car, $\psi$ étant compris lui-même entre 0 et 90°, la première et la dernière valeur de $\mu$ sont elles-mêmes comprises entre 0 et 90°. Ces valeurs donneront pour $k^2$ deux valeurs réelles comprises entre 0 et 1, et d'après ce que nous savons l'une de ces valeurs de $k^2$ sera comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$ et l'autre entre $\frac{1}{2}$ et 1.

Mais l'équation (6) nous fait voir que si nous voulons que $\gamma$ soit réel, il faudra si $g_3 > 0$ prendre :

$$\mu = 60° - \frac{\psi}{3},$$

ce qui donnera pour $k^2$ une valeur comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$, ou si l'on pose $\sin \theta = k$, $\theta < \frac{\pi}{4}$ ; si $g_3 < 0$ prendre :

$$\mu = 60° + \frac{\psi}{3},$$

ce qui donnera pour $k^2$ une valeur comprise entre 1 et $\frac{1}{2}$, ou $\theta > \frac{\pi}{4}$ si on a posé $\sin\theta = k$. (En un mot, on doit avoir $g_3 \cos 2\theta > 0$ dans les deux cas).

La valeur de $k$ étant choisie de cette façon, la valeur de $\gamma$ sera réelle.

L'équation (5) donnera alors

$$\gamma^4 = \frac{3}{4} \frac{g_2}{k^2\left[\left(\frac{1}{k}+k\right)^2 - 3\right]} = \frac{3}{4}\frac{g_2}{k^2(y-3)},$$

ou bien

$$\gamma^4 = \frac{3}{4}\frac{g_2}{k^2 z}.$$

C'est-à-dire en remplaçant $k$ et $z$ par leurs valeurs

$$\gamma^4 = g_2 \frac{\cos\psi}{4\cos\mu \operatorname{tg}^2\varphi},$$

et extrayant la racine quatrième et remarquant qu'avec le choix que nous avons fait de $k$ $\gamma$ est réel et peut être supposé positif, on a

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad \gamma = \sqrt[4]{\frac{g_2 \cos\psi}{4\cos\mu \operatorname{tg}^2\varphi}}.$$

Voici en résumé les formules qui résolvent complètement le problème dans le cas de $\Delta > 0$

$$\sin\psi = \sqrt{\frac{27 g_3^2}{g_2^3}}, \quad 0 < \psi < 90^\circ$$

$$\mu = 60^\circ - \frac{\psi}{3}, \quad \text{si} \quad g_3 > 0,$$

ou

$$\mu = 60^\circ + \frac{\psi}{3}, \quad \text{si} \quad g_3 < 0,$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \sqrt{\frac{\cos\psi}{\cos^3\mu}}, \quad 0 < \varphi < 45^\circ,$$

$$k = \operatorname{tg}\varphi,$$

$$\gamma = \sqrt[4]{\frac{g_2 \cos\psi}{4 \cos\mu \operatorname{tg}^2\varphi}}.$$

Si l'on veut se servir des tables des fonctions elliptiques, l'argument $\theta$ est défini par la relation

$$\sin\theta = k.$$

## VI. — *Calcul de* k *et* $\gamma$ *en fonction de* $g_2$ *et* $g_3$.

*Deuxième cas :*

$$\Delta < 0.$$

Nous poserons maintenant

$$(k^2 - k'^2)^2 = x,$$

d'où

$$4k^2k'^2 = 1 - x.$$

Les équations (11) et (12) du paragraphe IV deviendront alors

$$g_2 = \frac{4}{3}\gamma^4(4x - 3),$$

$$g_3 = -\frac{8}{27}\gamma^6\sqrt{x}\,(9 - 8x);$$

en éliminant $\gamma$ entre ces deux équations on a

$$g_2^3(9 - 8x)^2 x = 27g_3^2(4x - 3)^3,$$

posant maintenant

$$4x - 3 = z, \qquad a = 4\frac{g_2^3 - 27g_3^2}{27g_2^3},$$

on aura

$$(1) \ldots\ldots \quad az^3 - z + 1 = 0.$$

C'est l'équation que nous avions déjà obtenue, mais ici elle n'a qu'une seule racine réelle.

Proposons-nous de trouver la racine réelle de cette équation (1).

Nous poserons pour cela

$$(2) \ldots\ldots \quad z = -\lambda(\operatorname{tg}\varphi \pm \cot\varphi),$$

où $\lambda$ et $\varphi$ sont deux arbitraires, et où le signe supérieur correspond au cas de $a > 0$ et le signe inférieur à celui de $a < 0$.

On déduit de (2)

$$z^3 = -\lambda^3 [\operatorname{tg}^3\varphi \pm \cot^3\varphi \pm 3(\operatorname{tg}\varphi \pm \cot\varphi)].$$

Ce qui peut s'écrire en tenant compte de (2)

$$(3) \ldots \quad z^3 \mp 3\lambda^2 z + \lambda^3(\operatorname{tg}^3\varphi \pm \cot^3\varphi) = 0;$$

en identifiant (3) et (1), la racine réelle de cette dernière équation sera donnée par la formule (2).

Faisons cette identification, on aura

$$\pm 3\lambda^2 = \frac{1}{a}, \quad \lambda^3(\operatorname{tg}^3\varphi \pm \cot^3\varphi) = \frac{1}{a};$$

la première donnera d'abord

$$(4) \ldots\ldots \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{\pm 3a}};$$

pour résoudre la seconde nous poserons

$$(5) \ldots\ldots \quad \operatorname{tg}\varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\psi},$$

elle deviendra alors, en tenant compte de la valeur de $\lambda$

$$(6) \ldots\ldots \quad \operatorname{tg}\psi \pm \cot\psi = \pm 3\sqrt{\pm 3a}.$$

Nous devons maintenant distinguer deux cas suivant le signe de $a$ :

1° $a>0$. On doit alors prendre les signes supérieurs et l'équation (6) donne

$$\frac{2}{\sin 2\psi}=3\sqrt{3a},$$

d'où

$$(7)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\qquad \sin 2\psi=\frac{2}{3\sqrt{3a}}.$$

Remplaçons dans cette équation $a$ par sa valeur

$$a=4\,\frac{g_2^3-27g_3^2}{27g_2^3},$$

elle devient

$$\sin 2\psi=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{27g_3^2}{g_2^3}}};$$

d'où l'on déduit

$$(8).\;.\;.\;.\;.\qquad \operatorname{tg} 2\psi=\sqrt{\frac{-g_2^3}{27g_3^2}}\qquad \psi<45^\circ,$$

valeur toujours réelle puisque dans le cas présent $\Delta<0$ et $a>0$ exige $g_2<0$.

On aura ensuite, en vertu des équations (2) et (4),

$$z=\frac{-1}{\sqrt{3a}}\;\frac{2}{\sin 2\varphi};$$

ce qui, en tenant compte de l'équation (7), donne

$$(9)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\qquad z=-3\frac{\sin 2\psi}{\sin 2\varphi}.$$

Cette valeur de $z$ est négative, ainsi que cela devait être, car si $a>0$, la racine réelle de l'équation (1) est négative.



Remarquons, de plus, que comme nous avons pris $\psi < 45°$, on a $\text{tg}\,\psi < 1$ et, par suite, en vertu de l'équation (5), $\text{tg}\,\varphi < 1$.

On a donc également $\varphi < 45°$.

2° $a < 0$. On doit prendre les signes inférieurs et l'équation (6) donne

$$(7') \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad \cot 2\psi = \frac{3\sqrt{-3a}}{2},$$

ou en remplaçant $a$ par sa valeur

$$\cot 2\psi = \sqrt{\frac{27g_3^2}{g_2^3} - 1},$$

d'où l'on déduit

$$(8') \;.\;.\;.\;. \quad \sin 2\psi = \sqrt{\frac{g_2^3}{27g_3^2}} \qquad \psi < 45°,$$

valeur toujours acceptable, car comme dans le cas présent $a < 0$ et $\Delta < 0$ cela exige

$$1 > \frac{g_2^3}{27g_3^2} > 0.$$

On déduira ensuite des équations (2) et (4)

$$z = \frac{2}{\sqrt{-3a}} \cot 2\varphi,$$

ou en tenant compte de (7')

$$(9') \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad z = 3\,\frac{\cot 2\varphi}{\cot 2\psi}.$$

Cette valeur de $z$ est, ainsi que cela devait être, positive.

La valeur $z$ de la racine réelle de l'équation (1) étant obtenue on aura ensuite

$$(10) \;.\;.\;.\;. \quad z = 4x - 3 = 4(k^2 - k'^2)^2 - 3.$$

40.

Posons ici

$$k = \sin\theta \ (^*),$$

d'où

$$k' = \cos\theta;$$

l'équation (10) pourra alors s'écrire

$$4\cos^2 2\theta - 4 = z - 1,$$

ou

(11) . . . . . . $$\sin^2 2\theta = \frac{1 - z}{4}.$$

Mais en vertu de l'équation (1)

$$1 - z = -az^3,$$

de sorte que l'on a

(12). . . . . . . $$\sin^2 2\theta = -\frac{az^3}{4}.$$

Distinguons de nouveau deux cas suivant le signe de $a$

1° $a > 0$. On tire alors de l'équation (7)

$$\frac{a}{4} = \frac{1}{27\sin^2 2\psi},$$

et en tenant compte de cette valeur ainsi que de celle de $z$ donnée par l'équation (9) on a

$$\sin^2 2\theta = \frac{\sin 2\psi}{\sin^3 2\varphi},$$

ou

(13) . . . . . . $$\sin 2\theta = \sqrt{\frac{\sin 2\psi}{\sin^3 2\varphi}}.$$

2° $a < 0$. On tire dans ce cas de l'équation (7')

$$-\frac{a}{4} = \frac{\cot^2 2\psi}{27},$$

(*) $\theta$ sera précisément l'angle qui sert d'argument dans les tables des fonctions elliptiques.

et portant cette valeur de $-\frac{a}{4}$ ainsi que celle de $z$ déduite de (9') dans (12), on a

$$\sin^2 2\theta = \frac{\cot^3 2\varphi}{\cot 2\psi},$$

ou

$$(13') \quad \ldots\ldots\ldots \quad \sin 2\theta = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} 2\psi}{\operatorname{tg}^3 2\varphi}},$$

Il reste à faire voir que les valeurs (13) et (13') de $\sin 2\theta$ sont toujours réelles et plus petites que 1.

Nous remarquerons d'abord que, comme nous avons pris dans les deux cas

$$\psi < 45^\circ,$$

on a

$$\operatorname{tg}\psi < 1$$

et que par suite l'équation (5) donne

$$\operatorname{tg}\psi < \operatorname{tg}\varphi < 1$$

ou

$$(14) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \psi < \varphi < 45^\circ.$$

Il résulte d'abord de là que les valeurs (13) et (13') de $\sin 2\theta$ sont réelles.

Mais on a en vertu de (5)

$$\sin^3 2\varphi = \frac{8\operatorname{tg}^3\varphi}{(1+\operatorname{tg}^2\varphi)^3} = \frac{8\operatorname{tg}\psi}{1+\operatorname{tg}^2\psi+3\dfrac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\cos^2\varphi}},$$

ce qui peut s'écrire

$$\sin^3 2\varphi = \frac{4\sin 2\psi}{1+3\operatorname{tg}^2\varphi\dfrac{\cos^2\psi}{\cos^2\varphi}}.$$

Mais

$$1+3\operatorname{tg}^2\varphi\frac{\cos^2\psi}{\cos^2\varphi} = 1+3\frac{\operatorname{tg}\psi\cos^2\psi}{\cos\varphi\sin\varphi} = 1+3\frac{\sin 2\psi}{\sin 2\varphi} < 4$$

en vertu des inégalités (14).



On a donc d'après cela

$$(15) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\sin 2\psi}{\sin^3 2\varphi} < 1,$$

et la valeur (13) de sin 2θ est toujours acceptable. Quant à la valeur (13'), elle peut s'écrire

$$\sin 2\theta = \sqrt{\frac{\sin 2\psi}{\sin^3 2\varphi} \frac{\cos^3 2\varphi}{\cos 2\psi}};$$

le premier facteur sous le radical est plus petit que 1 en vertu de la relation (15) (qui s'applique à ce cas aussi bien qu'au précédent). Quant au second facteur, il est également plus petit que 1, car on a en vertu de la relation (14)

$$\cos 2\psi > \cos 2\varphi,$$

et à plus forte raison

$$\cos 2\psi > \cos^3 2\varphi.$$

Reste à trouver $\gamma$.

On a dans les deux cas

$$(16) \quad \ldots\ldots \quad g_2 = \frac{4}{3}\gamma^4 (1 - 16k^2k'^2),$$

$$(17) \quad \ldots \quad g_3 = -\frac{8}{17}\gamma^6 (k^2 - k'^2)(1 + 32k^2k'^2),$$

remplaçant $k$ par $\sin\theta$ et $k'$ par $\cos\theta$ l'équation (17) devient

$$g_3 = \frac{8}{27}\gamma^6 \cos 2\theta (1 + 8 \sin^2 2\theta).$$

Or parmi les valeurs de 2θ fournies par les équations (13) ou (13') il y en a une comprise entre 0 et 90° et l'autre entre 90° et 180°; or la dernière équation que nous venons d'écrire fait voir que:

Si

$$g_3 > 0,$$

on devra prendre

$$2\theta < 90^\circ$$

ou

$$\theta < 45^\circ.$$

Si

$$g_3 < 0,$$

on devra prendre

$$2\theta > 90^\circ$$

ou

$$\theta > 45^\circ.$$

En un mot dans tous les cas $\cos 2\theta$ doit avoir le signe de $g_3$ (comme lorsque $\Delta > 0$).

La valeur de $\theta$ étant choisie de cette façon, celle de $\gamma$ sera réelle et l'équation (16) devient en employant les mêmes notations que plus haut:

$$g_2 = \frac{4}{3}\gamma^4(4x - 3) = \frac{4}{3}\gamma^4 z,$$

d'où

$$\gamma^4 = \frac{3}{4}\frac{g_2}{z}.$$

Nous devons ici (lorsque $\Delta < 0$) distinguer de nouveau deux cas suivant le signe de $g_2$ :

1° $\quad a > 0 \quad$ ou $\quad g_2 < 0,$

l'équation (9) donne alors

$$\gamma^4 = -\frac{1}{4}g_2\frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\psi}$$

ou

(18) . . . . . . . $$\gamma = \sqrt[4]{-\frac{g_2}{4}\frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\psi}},$$

valeur réelle puisque

$$g_2 < 0 \quad \text{et} \quad \psi < \varphi < 45^\circ.$$

2° $\quad a < 0 \quad$ ou $\quad g_2 > 0.$

L'équation (9') donne alors

$$\gamma^4 = \frac{1}{4} g_2 \frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{\operatorname{tg} 2\psi},$$

et par suite

(18') . . . . . . . $\gamma = \sqrt[4]{\frac{g_2}{4} \frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{\operatorname{tg} 2\psi}},$

valeur réelle puisque

$$g_2 > 0 \quad \text{et} \quad \psi < \varphi < 45^\circ.$$

Voici en résumé les formules qui résolvent complètement le problème dans le cas de $\Delta < 0$

1° $$a > 0 \quad \text{ou} \quad g_2 < 0,$$

$$\operatorname{tg} 2\psi = \sqrt{\frac{-g_2^3}{27 g_3^2}} \quad \psi < 45^\circ,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \psi} \quad \varphi < 45^\circ,$$

$$\sin 2\theta = \sqrt{\frac{\sin 2\psi}{\sin^3 2\varphi}}.$$

On doit avoir de plus pour

$$g_3 \cos 2\theta > 0,$$

$$\sin \theta = k, \quad \cos \theta = k',$$

$$\gamma = \sqrt[4]{-\frac{g_2}{4} \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\psi}};$$

2° $$a < 0 \quad \text{ou} \quad g_2 > 0,$$

$$\sin 2\psi = \sqrt{\frac{g_2^3}{27 g_3^2}} \quad \psi < 45^\circ,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \psi} \quad \varphi < 45^\circ,$$

$$\sin 2\theta = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} 2\psi}{\operatorname{tg}^3 2\varphi}},$$

on doit avoir de plus

$$g_3 \cos 2\theta > 0,$$

$$\sin\theta = k, \quad \cos\theta = k',$$

$$\gamma = \sqrt[4]{\frac{g_2}{4}\frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{\operatorname{tg} 2\psi}}.$$

Dans les deux cas la relation $g_3 \cos 2\theta > 0$ achève de déterminer la valeur de $\theta$.

Si on se sert des tables des fonctions elliptiques, leur argument est précisément $\theta$.

### VII. — *Calcul direct des périodes et des autres éléments en fonction de* k et $\gamma$.

Proposons-nous de calculer d'abord K K', $q$ et $p$ en fonction de $k$ et $\gamma$, où

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}} \quad p = e^{-\frac{\pi K}{K'}}.$$

Remarquons d'abord que l'on a

$$K_1 = \gamma K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\theta \sin^2\varphi}},$$

$$K'_1 = \gamma K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2\theta \sin^2\varphi}}.$$

On pourra toujours supposer $k^2 < \frac{1}{2}$ ou $\theta < 45°$, car K' et $p$ sont formés avec $k'$ ou $\frac{\pi}{2} - \theta$ comme K et $q$ le sont avec $k$ ou $\theta$. Il n'y a donc pour pouvoir supposer toujours $\theta < 45°$ qu'à commencer les calculs pour K' et $p$ si $\theta$ était plus grand que 45°, car on aurait alors à remplacer $\theta$ par $\frac{\pi}{2} - \theta$.

Nous supposerons donc toujours dans les calculs suivants

$$\theta < 45° \quad \text{ou} \quad k^2 < \frac{1}{2}.$$

Ceci posé, nous avons obtenu dans le Cours de l'année passée les formules (*)

$$\sqrt{\frac{2\gamma K}{\pi}} = \Pi(1 + q^{2n-1})^2(1 - q^{2n}),$$

$$\theta_3(u) = \Pi(1 - q^{2n})\Pi(1 + 2q^{2n-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{2(2n-1)}).$$

On déduit de la dernière

$$\theta_3(0) = \Pi(1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1})^2 = \sqrt{\frac{2\gamma K}{\pi}}.$$

Comme d'ailleurs

$$dn\gamma u = \sqrt{k'}\,\frac{\theta_3(u)}{\theta(u)},$$

on a

$$\theta(0) = \sqrt{k'}\,\theta_3(0) = \sqrt{\frac{2\gamma K}{\pi}}\,\sqrt{k'}.$$

Remplaçant maintenant $\theta(0)$ et $\theta_3(0)$ par leur développement en série, nous aurons

$$\sqrt{\frac{2\gamma K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16},$$

$$\sqrt{\frac{2\gamma K}{\pi}}\,\sqrt{k'} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16},$$

en ajoutant et retranchant ces deux équations et remplaçant pour simplifier l'écriture $\gamma K$ par $K_1$, on a

(1) . . $$\sqrt{\frac{2K_1}{\pi}}(1 + \sqrt{k'}) = 2(1 + 2q^4 + 2q^{16} + \cdots),$$

(2) . . . $$\sqrt{\frac{2K_1}{\pi}}(1 - \sqrt{k'}) = 4q(1 + q^8 + \cdots).$$

En divisant (2) par (1) et posant

$$\sin\theta = k, \quad \cos\theta = k',$$

(*) Deuxième partie du Cours, pp. 59 et 56.

on a

$$\frac{1-\sqrt{\cos\theta}}{1+\sqrt{\cos\theta}} = 2q\,\frac{1+q^8+q^{24}+\cdots}{1+2q^4+2q^{16}+\cdots},$$

ou

$$q = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{\cos\theta}}{1+\sqrt{\cos\theta}}\cdot\frac{1+2q^4+2q^{16}+\cdots}{1+q^8+q^{24}.}$$

Posons maintenant

$$(3)\quad \ldots\ldots\ldots \quad \sqrt{\cos\theta} = \cos z.$$

Cette formule s'écrira

$$q = \frac{1}{2}\,tg^2\frac{z}{2}\,\frac{1+2q^4+2q^{16}+\cdots}{1+q^8+q^{24}+\cdots},$$

ou en écrivant pour simplifier l'écriture

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2\frac{z}{2} = \alpha,$$

$$q = \alpha\,\frac{1+2q^4+2q^{16}+\cdots}{1+q^8+q^{24}+\cdots}.$$

Remarquons que si nous multiplions $q$ par une racine quatrième de l'unité, $\alpha$ se trouve multiplié par la même quantité; nous sommes donc conduit à poser

$$q = \alpha(1+\lambda_1\alpha^4+\lambda_2\alpha^8+\lambda_3\alpha^{12}+\cdots),$$

remplaçons $q$ par cette valeur, chassons les dénominateurs et divisons les deux membres par $\alpha$, nous aurons

$$(1+\lambda_1\alpha^4+\lambda_2\alpha^8+\lambda_3\alpha^{12}+\cdots)\left[1+\alpha^8[1+8\lambda_1\alpha^4+4(7\lambda_1^2+2\lambda_2)\alpha^8+\cdots]+\alpha^{24}+\cdots\right]$$
$$= 1 + 2\alpha^4[1+4\lambda_1\alpha^4+2(3\lambda_1^2+2\lambda_2)\alpha^8+\cdots]+2\alpha^{16}+\cdots$$

et égalant dans les deux membres les coefficients des puissances semblables de $\alpha$, on aura

$$\lambda_1 = 2,\quad \lambda_2+1 = 8\lambda_1,\quad \lambda_3+9\lambda_1 = 4(3\lambda_1^2+2\lambda_2),$$

d'où

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 15, \quad \lambda_3 = 150.$$

On a donc

$$q = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2\frac{z}{2} + \frac{2}{2^5}\,\mathrm{tg}^{10}\frac{z}{2} + \frac{15}{2^9}\,\mathrm{tg}^{18}\frac{z}{2} + \frac{150}{2^{13}}\,\mathrm{tg}^{26}\frac{z}{2}.$$

Or, pour

$$\theta = 45^\circ,$$

on a

$$\log\left(\frac{150}{2^{13}}\,\mathrm{tg}^{26}\frac{z}{2}\right) = \overline{16},4391617,$$

et on pourra presque toujours négliger ce terme ou tout au moins le suivant.

On pourra même le plus souvent se contenter du premier terme, car pour le deuxième on a déjà

$$\log\left(\frac{2}{2^5}\,\mathrm{tg}^{10}\frac{z}{2}\right) = \overline{7},4791340,$$

lorsque

$$\theta = 45^\circ.$$

Calcul de K.

Si dans la formule (1) on remplace $\sqrt{k'}$, comme plus haut, par $\cos z$, elle devient

$$\sqrt{\frac{2K_1}{\pi}}(1 + \cos z) = 2\,(1 + 2q^4 + 2q^{16} + \cdots),$$

d'où

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad K_1 = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1 + 2q^4 + 2q^{16}}{\cos^2\frac{z}{2}}\right]^2,$$

e terme en $q^{16}$ pourra en général être négligé et même souvent celui en $q^4$.

Ayant obtenu $K_1$ on a

$$(6)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad K = \frac{K_1}{\gamma}.$$

Calcul de $p$.

On a

$$\frac{1}{q}=e^{\frac{\pi K'}{K}},\quad \frac{1}{p}=e^{\frac{\pi K}{K'}}$$

D'où, en désignant par M le module des logarithmes vulgaires qui n'est autre chose que $\log e$, on a :

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \log\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{M\pi K'}{K},\quad \log\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{M\pi K}{K'},$$

d'où

$$\log\left(\frac{1}{q}\right)\times\log\left(\frac{1}{p}\right)=M^2\pi^2,$$

et par suite

$$(8) \quad . \quad . \quad \log,\log\left(\frac{1}{p}\right)=2\log M+2\log\pi-\log,\log\left(\frac{1}{q}\right),$$

équation d'où l'on tirera $p$.

Calcul de K'.

De l'équation (7) on déduit

$$(9) \quad . \quad . \quad \log K'=\log K+\log,\log\left(\frac{1}{q}\right)-\log M-\log\pi.$$

Calcul de J et de J'.

On a

$$k^2\,\mathrm{sn}^2\gamma u=\frac{J}{K}-\frac{1}{\gamma^2}D_u\frac{\theta'(u)}{\theta(u)},$$

ou

$$\frac{J}{K}=k^2\,\mathrm{sn}^2\gamma u+\frac{1}{\gamma^2}\frac{\theta''(u)}{\theta(u)}-\frac{1}{\gamma^2}\left[\frac{\theta'(u)}{\theta(u)}\right]^2,$$

faisant maintenant $u=0$ et remarquant que

$$\theta'(0)=0,$$

on a

$$\frac{J}{K}=\frac{1}{\gamma^2}\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}=\frac{2q}{\gamma^2}\frac{\pi^2}{K^2}\frac{1-4q^3+9q^8+\cdots}{1-2q+2q^4+\cdots},$$





ou enfin

$$(10) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad J = \frac{2q}{\gamma^2} \frac{\pi^2}{K} \frac{1 - 4q^3 + 9q^8 + \cdots}{1 - 2q + 2q^4 + \cdots},$$

La relation

$$\gamma^2 (KJ' - JK') = \frac{\pi}{2}$$

donnera ensuite

$$(11) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad J' = \frac{JK'}{K} + \frac{\pi}{2\gamma^2 K}.$$

Si $\theta > 45^\circ$ on commencera par calculer directement $J'$ en fonction de $p$.

On aura pour cela (*)

$$\theta(u) = e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} \sqrt{\frac{K}{K'}}\, \vartheta(u),$$

d'où

$$D_u \frac{\theta'(u)}{\theta(u)} = -\frac{\pi}{2K'K} + D_u \frac{\vartheta'(u)}{\vartheta(u)},$$

mais comme $\vartheta'(0) = 0$, on en déduit

$$\frac{1}{\gamma^2} \frac{\theta''(o)}{\theta(o)} = \frac{J}{K} = -\frac{\pi}{2\gamma^2 KK'} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\vartheta''(o)}{\vartheta(o)},$$

et à cause de

$$\frac{J}{K} + \frac{\pi}{2\gamma^2 KK'} = \frac{J'}{K'},$$

$$\frac{J'}{K'} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\vartheta''(o)}{\vartheta(o)} = \frac{\pi^2}{4\gamma^2 K'^2} \frac{p^{\frac{1}{4}} + 9p^{\frac{9}{4}} + 25p^{\frac{25}{4}} + \cdots}{p^{\frac{1}{4}} + p^{\frac{9}{4}} + p^{\frac{25}{4}} + \cdots}$$

Donc enfin

$$(12) \quad . \quad . \quad J' = \frac{\pi^2}{4\gamma^2 K'} \frac{1 + 9p^2 + 25p^6 + 49p^{12} + \cdots}{1 + p^2 + p^6 + p^{12} + \cdots}$$

(*) 2ᵉ partie du cours, page 72.

On aurait ensuite

(13). . . . . . . . $$J = \frac{J'K}{K'} - \frac{\pi}{2\gamma^2 K'}.$$

VIII. — *Définition des fonctions $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ de M. Weinstrass.*

Avec la fonction $\sigma$ on considère souvent les trois fonctions $\sigma_1$, $\sigma_2$ et $\sigma_3$.

Elles sont définies par les relations suivantes :

$$\sigma_1(u) = \frac{\sigma(u + K)}{\sigma(K)} e^{-\eta u},$$

$$\sigma_2(u) = \frac{\sigma(K + iK' + u)}{\sigma(K + iK')} e^{-(\eta + \eta')u},$$

$$\sigma_3(u) = \frac{\sigma(iK' + u)\, e^{-\eta' u}}{\sigma(iK')}.$$

où l'on a posé, comme dans des formules employées dans le cours de l'an passé (*)

$$\eta = \gamma^2 \left(\frac{1 + k^2}{3} K - J\right), \quad \eta' = \gamma^2 \left(\frac{1 + k^2}{3} iK' - iJ'\right).$$

D'où, en tenant compte de la relation,

$$\gamma^2 (J'K - JK') = \frac{\pi}{2},$$

on déduit

$$\eta iK' - \eta' K = \frac{\pi i}{2}.$$

Comme d'ailleurs

$$\sigma(u) = \frac{\theta_1(u)}{\theta_1'(o)} e^{\frac{\eta u^2}{2K}},$$

(*) 2e partie du cours, page 82.

on en déduit

$$\sigma_1(u) = \frac{\theta_2(u)}{\theta_2(o)} e^{\frac{\eta u^2}{2K}},$$

$$\sigma_2(u) = \frac{\theta_3(u)}{\theta_3(o)} e^{\frac{\eta u^2}{2K}},$$

$$\sigma_3(u) = \frac{\theta(u)}{\theta(o)} e^{\frac{\eta u^2}{2K}},$$

On a donc

$$\mathrm{sn}\gamma u = \gamma \frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)},$$

$$\mathrm{cn}\gamma u = \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)},$$

$$\mathrm{dn}\gamma u = \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)}.$$

Car lorsque la multiplication est quelconque, on a

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \gamma \frac{\theta(o)}{\theta'_1(o)}, \quad \sqrt{\frac{k'}{k}} = \frac{\theta(o)}{\theta_2(o)}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\theta(o)}{\theta_3(o)}.$$

Nous n'en dirons pas davantage sur ces fonctions, ayant indiqué les relations simples qui les lient aux fonctions connues, et renverrons à l'ouvrage de M. Halphen ceux qui voudraient pousser plus loin leur étude.

## IX. — *Calcul du module et du multiplicateur lorsque les racines de la quantité sous le radical sont en évidence.*

Lorsque les racines de la quantité sous le radical sont en évidence, on peut calculer directement $\gamma$ et $k$, par des formules beaucoup plus simples que les formules générales et sans passer pour cela par les fonctions de Jacobi.

Supposons d'abord que la quantité sous le radical ait au moins deux racines réelles, et soit $x_0$ l'une de ces racines réelles. On

peut alors faire la réduction par les formules (30′) et (33′) du paragraphe II, et l'on aura en faisant $\alpha = 1$

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad x = x_0 + \frac{r_1}{p(u) - \frac{r_2}{2}}.$$

$$(2) \quad . \quad p(u) = \frac{1}{4}\frac{A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{x - x_0} - \frac{1}{4}A(x+x_0)^2 - B(x+x_0) - C,$$

et l'on a de plus puisque $\alpha = 1$

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad \frac{dx}{du} = \frac{-r_1 p'(u)}{\left(p(u) - \frac{r_2}{2}\right)^2}.$$

$$(5). \quad \ldots\ldots \quad \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = du;$$

on déduit de ces deux dernières équations

$$\frac{\sqrt{R(x)}}{(x - x_0)^2} = -\frac{p'(u)}{r_1},$$

et on en conclut que si $x_1$, $x_2$, $x_3$ sont les trois autres racines de $R(x) = 0$ en dehors de $x_0$, $p'(u)$ s'annulera pour ces trois valeurs de $x$.

Mais les valeurs de $u$ qui annulent $p(u)$ sont, en supposant *le discriminant positif*,

$$K, \quad iK' \text{ et } K + iK'.$$

Nous aurons donc

$$(6) \quad . \quad \begin{cases} p(K) = -\frac{1}{4}A(x_1 + x_0)^2 - B(x_1 + x_0) - C, \\ p(K'i) = -\frac{1}{4}A(x_2 + x_0)^2 - B(x_2 + x_0) - C, \\ p(K + iK') = -\frac{1}{4}A(x_3 + x_0)^2 - B(x_3 + x_0) - C. \end{cases}$$

Mais puisque nous supposons le discriminant positif,

$$p(u) = \gamma^2\left(\frac{1}{\mathrm{sn}^2\gamma u} - \frac{1+k^2}{3}\right),$$

et par suite

$$(7) \ldots\ldots \begin{cases} p(\mathrm{K}) = \gamma^2\dfrac{2-k^2}{3}, \\ p(i\mathrm{K}') = -\gamma^2\dfrac{1+k^2}{3}, \\ p(\mathrm{K}+i\mathrm{K}') = \gamma^2\dfrac{2k^2-1}{3}. \end{cases}$$

Remarquons d'abord que si, comme nous le supposons, le discriminant est positif, les quantités précédentes sont toutes réelles.

Or, en tenant compte de la relation

$$\frac{4\mathrm{B}}{\mathrm{A}} = -x_0 - x_1 - x_2 - x_3,$$

les relations (6) deviendront

$$(8) \ldots\ldots \begin{cases} p(\mathrm{K}) = \dfrac{\mathrm{A}}{4}(x_0 + x_1)(x_2 + x_3) - \mathrm{C}, \\ p(i\mathrm{K}') = \dfrac{\mathrm{A}}{4}(x_0 + x_2)(x_1 + x_3) - \mathrm{C}, \\ p(\mathrm{K}+i\mathrm{K}') = \dfrac{\mathrm{A}}{4}(x_0 + x_3)(x_1 + x_2) - \mathrm{C}. \end{cases}$$

Or, si $x_0$ et $x_1$ sont réels et $x_2$ et $x_3$ imaginaires conjugués, $x_0 + x_2$ ne peut être imaginaire conjugué de $x_1 + x_3$, car ceci exigerait $x_0 = x_1$, hypothèse inadmissible puisque alors les fonctions elleptiques dégénéreraient en fonctions circulaires ou exponentielles.

Donc le discriminant ne peut, dans le cas présent, être positif que si les quatre racines sont réelles.

Nous supposons donc, pour le moment, que les quatre racines sont réelles.

Les équations (7) et (8) donnent alors

$$p(\mathrm{K}) - p(i\mathrm{K}') = \gamma^2 = \frac{\mathrm{A}}{4}(x_0 - x_3)(x_2 - x_1),$$

$$p(\mathrm{K} + i\mathrm{K}') - p(i\mathrm{K}') = \gamma^2 k^2 = \frac{\mathrm{A}}{4}(x_0 - x_1)(x_2 - x_3).$$

D'où l'on déduit

$$(9). \quad \ldots \ldots \quad k^2 = \frac{(x_0 - x_1)(x_2 - x_3)}{(x_0 - x_3)(x_2 - x_1)},$$

$$(10). \quad \ldots \quad \gamma^2 = \frac{\mathrm{A}}{4}(x_0 - x_3)(x_2 - x_1),$$

puis

$$(11). \quad \ldots \ldots \quad k'^2 = \frac{(x_0 - x_2)(x_3 - x_1)}{(x_0 - x_3)(x_2 - x_1)},$$

et l'on pourra toujours faire en sorte que $k^2$, $k'^2$ et $\gamma^2$ soient tous trois positifs et aient par suite des valeurs acceptables.

Supposons maintenant que la quantité sous le radical ait deux racines imaginaires.

D'après ce que nous avons dit, le discriminant sera alors négatif, et on devra prendre

$$(12). \quad . \quad p(u) = \gamma^2 \left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2 \gamma u} - \frac{1 + k^2}{3} - \frac{k^2 k'^2 \mathrm{sn}^2 \gamma u}{\mathrm{dn}^2 \gamma u}\right].$$

Mais dans ce cas, les périodes élémentaires ne sont pas 2K et $2i\mathrm{K}'$, mais 2K et $\mathrm{K} + i\mathrm{K}'$, de sorte qu'alors les zéros de $p'(u)$ correspondent aux valeurs de $u$

$$\mathrm{K}, \quad \frac{\mathrm{K} + i\mathrm{K}'}{2}, \quad \frac{\mathrm{K} - i\mathrm{K}'}{2}.$$

Comme $p(\mathrm{K})$ est réel, nous devrons, dans les formules (8), prendre pour les racines réelles $x_0$ et $x_1$, $x_2$ et $x_3$ étant par suite imaginaires conjugués.

Soit

$$x_2 = a + bi, \quad x_3 = a - bi.$$

Il nous faut maintenant calculer

$$\mathrm{sn}^2\gamma\left(\frac{K + iK'}{2}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{dn}^2\gamma\left(\frac{K + iK'}{2}\right).$$

ainsi que

$$\mathrm{sn}^2\gamma\left(\frac{K - iK'}{2}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{dn}^2\gamma\left(\frac{K - iK'}{2}\right).$$

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$z = \gamma\,\frac{K + iK'}{2}.$$

Comme $\mathrm{dn}\,2z$ est nul, nous aurons

$$\mathrm{dn}^2 z - k^2\mathrm{sn}^2 z\,\mathrm{cn}^2 z = 0,$$

ou

$$k^2\mathrm{sn}^4 z - 2k^2\mathrm{sn}^2 z + 1 = 0,$$

d'où

$$\mathrm{sn}^2 z = 1 \pm \frac{ik'}{k}.$$

Pour lever l'ambiguïté du double signe, nous remarquons que la formule

$$\mathrm{sn}\,(\alpha + \beta i) = \frac{\mathrm{sn}\alpha\,\mathrm{cn}\beta i\,\mathrm{dn}\beta i + \mathrm{sn}\beta i\,\mathrm{cn}\alpha\,\mathrm{dn}\alpha}{1 - k^2\mathrm{sn}^2\beta i\,\mathrm{sn}^2\alpha},$$

nous fait voir que si

$$0 < \alpha < K, \quad 0 < \beta < K',$$

$$\mathrm{sn}\,(\alpha + \beta i) = A + Bi \quad \text{où} \quad A > 0, \quad B > 0,$$

et par suite

$$\mathrm{sn}^2\,(\alpha + \beta i) = A - B + 2ABi.$$

De sorte que le coefficient de $i$ dans $\mathrm{sn}^2(\alpha + \beta i)$ doit être positif.

On a donc

$$\mathrm{sn}^2 z = 1 + \frac{ik'}{k}.$$



et par suite

$$\frac{1}{\text{sn}^2 z} = k(k - ik')$$

$$\text{dn}^2 z = k'(k' - ik),$$

$$\frac{\text{sn}^2 z}{\text{dn}^2 z} = \frac{i}{kk'}.$$

Les résultats relatifs à $\frac{K - iK'}{2}$ se déduisent des précédents en changeant $i$ en $-i$. En tenant compte de cette remarque et de la valeur

$$\frac{6C}{A} = 2a(x_0 + x_1) + x_0 x_1 + a^2 + b^2,$$

les formules (8) et (12) donnent (*)

$$p(K) = \frac{2\gamma^2}{3}(1 - 2k^2) = \frac{A}{6}\left[a(x_0 + x_1) - x_0 x_1 - a^2 - b^2\right],$$

$$p\left(\frac{K + iK'}{2}\right) = \gamma^2\left[\frac{2k^2 - 1}{3} - 2ikk'\right]$$
$$= \frac{A}{12}\left[x_0 x_1 + a^2 + b^2 - a(x_0 + x_1) + 3(x_0 - x_1)bi\right],$$

$$p\left(\frac{K - iK'}{2}\right) = \gamma^2\left[\frac{2k^2 - 1}{3} + 2ikk'\right]$$
$$= \frac{A}{12}\left[x_0 x_1 + a^2 + b^2 - a(x_0 + x_1) - 3(x_0 - x_1)bi\right].$$

D'où l'on déduit

$$\gamma^2(k^2 - k'^2) = \frac{A}{4}\left[x_0 x_1 + a^2 + b^2 - a(x_0 + x_1)\right],$$

$$2\gamma^2 kk' = -\frac{A}{4}(x_0 - x_1)b.$$

Pour résoudre ces équations nous poserons

(13) . . . . . . . $k = \sin\theta,$

(*) En prenant $x_1$ correspondant à K. $x_2$ correspondant à $\frac{K - iK'}{2}$ et $x_3$ correspondant à $\frac{K + iK'}{2}$.

d'où

$$(14) \ldots \ldots \ldots \quad k' = \cos\theta.$$

Nos équations deviendront

$$\gamma^2 \cos 2\theta = -\frac{A}{4}\left[x_0x_1 + a^2 + b^2 - a(x_0 + x_1)\right],$$

$$\gamma^2 \sin 2\theta = -\frac{A}{4}(x_0 - x_1)b,$$

d'où

$$(15) \ldots \quad \operatorname{tg} 2\theta = \frac{(x_0 - x_1)b}{x_0x_1 + a^2 + b^2 - a(x_0 + x_1)},$$

$$(16) \ldots \ldots \quad \gamma^2 = -\frac{Ab(x_0 - x_1)}{4 \sin 2\theta},$$

D'où l'on pourra toujours déduire pour $\theta$ et $\gamma$ des valeurs acceptables; remarquons, en effet, que le signe de $b$ peut être choisi arbitrairement, de façon que

$$-Ab(x_0 - x_1) > 0,$$

on aura alors pour $\gamma^2$ une valeur positive, $2\theta$ étant supposé plus petit que $\pi$.

Reste le cas où les quatre racines sont imaginaires.

La réduction doit alors être faite par la formule (18′) du paragraphe II.

$$(17) \ldots \quad x = -\frac{B}{A} + \frac{1}{2}\frac{p'(u) - p'(v)}{p(u) - p(v)},$$

D'ailleurs dans ce cas les formules (17) du paragraphe II et (4) du paragraphe III donnent

$$(18) \ldots \quad \frac{dx}{du} = \frac{\sqrt{R(x)}}{\sqrt{A}} = p(u) - p(u + v).$$

Les racines de $R(x)$ correspondent donc aux valeurs de $u$ qui rendent nulle

$$p(u) - p(u + v)$$

Mais comme dans le cas présent le discriminant est positif (*) on a

$$p(u) - p(u+v) = \gamma^2 \left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2 \gamma u} - \frac{1}{\mathrm{sn}^2 \gamma (u+v)}\right],$$

de sorte que les valeurs de $u$ qui correspondent aux racines de $R(x)$ sont

$$-\frac{v}{2}, \quad K - \frac{v}{2}, \quad iK' - \frac{v}{2}, \quad K + iK' - \frac{v}{2}.$$

Mais de la formule (3) du paragraphe III

$$p(u+v) = \frac{1}{4}\left[\frac{p'(u) - p'(v)}{p(u) - p(v)}\right]^2 - p(v) - p(u),$$

combinée avec la formule (17) on déduit

$$\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 = p(u+v) + p(u) + p(v),$$

ou bien en tenant compte de la formule (18)

$$(19) \quad . \quad . \quad . \quad \left(x + \frac{B}{A}\right)^2 = 2p(u) + p(v) - \frac{\sqrt{R(x)}}{\sqrt{A}}.$$

Mais puisque

$$\Delta > 0,$$

on a, en écrivant dans les seconds membres, pour simplifier l'écriture, $a$ à la place de $\gamma \frac{v}{2}$,

$$p\left(-\frac{v}{2}\right) = \gamma^2\left(\frac{1}{\mathrm{sn}^2 a} - \frac{1+k^2}{3}\right),$$

$$p\left(-\frac{v}{2} + K\right) = \gamma^2\left(\frac{\mathrm{dn}^2 a}{\mathrm{cn}^2 a} - \frac{1+k^2}{3}\right),$$

$$p\left(-\frac{v}{2} + iK'\right) = \gamma^2\left(k^2 \mathrm{sn}^2 a - \frac{1+k^2}{3}\right),$$

$$p\left(-\frac{v}{2} + K + iK'\right) = \gamma^2\left(\frac{k^2 \mathrm{cn}^2 a}{\mathrm{dn}^2 a} - \frac{1+k^2}{3}\right).$$

---

(*) Ce que nous vérifierons plus loin être exact.

On déduit de ces équations

$$(20)\quad \begin{cases} \left[p\left(-\frac{v}{2}\right)+\gamma^2\frac{1+k^2}{3}\right]\left[p\left(-\frac{v}{2}+i\mathrm{K}'\right)+\gamma^2\frac{1+k^2}{3}\right]=\gamma^4k^2, \\ \left[p\left(-\frac{v}{2}+\mathrm{K}\right)+\gamma^2\frac{1+k^2}{3}\right]\left[p\left(-\frac{v}{2}+\mathrm{K}+i\mathrm{K}'\right)+\gamma^2\frac{1+k^2}{3}\right]=\gamma^4k^2. \end{cases}$$

Soit maintenant

$$x_1 = m + ni,\quad x_2 = m - ni,\quad x_3 = r + si,\quad x_4 = r - si,$$

les quatre racines de $\mathrm{R}(x) = 0$.

Dans les équations (20), les seconds membres étant réels, il devra en être de même des premiers et on devra prendre, par exemple, $x_1$ et $x_2$ comme correspondant à $-\frac{v}{2}$ et $-\frac{v}{2}+i\mathrm{K}'$ et $x_3$ et $x_4$ comme correspondant à $-\frac{v}{2}+\mathrm{K}$ et $-\frac{v}{2}+\mathrm{K}+i\mathrm{K}'$.

La formule (19) donnera alors

$$(21)\quad \begin{cases} 2p\left(-\frac{v}{2}\right)=\left(x_1+\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\right)^2-p(v), \\ 2p\left(-\frac{v}{2}+i\mathrm{K}'\right)=\left(x_2+\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\right)^2-p(v), \\ 2p\left(-\frac{v}{2}+\mathrm{K}\right)=\left(x_3+\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\right)^2-p(v), \\ 2p\left(-\frac{v}{2}+\mathrm{K}+i\mathrm{K}'\right)=\left(x_4+\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\right)^2-p(v). \end{cases}$$

Mais

$$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}=-\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=-\frac{m+r}{2},$$

$$p(v)=\frac{\mathrm{B}^2-\mathrm{AC}}{\mathrm{A}^2}=\frac{(m+r)^2}{4}-\frac{x_1x_2+x_3x_4+(x_1+x_2)(x_3+x_4)}{6},$$

ou

$$p(v)=\frac{(m-r)^2-2(n^2+s^2)}{12}, \text{(*)}$$

(*) Ou aussi pour $p'(v)$ la valeur simple

$$p'(v)=\frac{(n^2-s^2)(m-r)}{4}.$$

 61

puis

$$x_1 + \frac{B}{A} = \frac{m-r}{2} + in, \quad x_2 + \frac{B}{A} = \frac{m-r}{2} - in,$$

$$x_3 + \frac{B}{A} = -\frac{m-r}{2} + is, \quad x_4 + \frac{B}{A} = -\frac{m-r}{2} - is.$$

En tenant compte de ces relations et des formules (21), les équations (20) deviendront

$$4\gamma^4 k^2 = \left[\frac{(m-r)^2}{6} - \frac{5n^2 - s^2}{6} + 2\gamma^2 \frac{1+k^2}{3}\right]^2 + n^2 (m-r)^2,$$

$$4\gamma^4 k^2 = \left[\frac{(m-r)^2}{6} - \frac{5s^2 - n^2}{6} + 2\gamma^2 \frac{1+k^2}{3}\right]^2 + s^2 (m-r)^2.$$

On en tire

(22) . . . $2\gamma^2 (1 + k^2) = (m-r)^2 + n^2 + s^2.$

(23). . . . $4\gamma^4 k^2 = \frac{1}{4}\left[(m-r)^2 + s^2 + n^2\right]^2 - s^2 n^2.$

Pour résoudre ces équations, nous poserons maintenant

$$k = \operatorname{tg} \varphi$$

d'où

$$k'^2 = \frac{\cos 2\varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Les équations (22) et (23) deviennent alors

$$\frac{2\gamma^2}{\cos^2 \varphi} = (m-r)^2 + n^2 + s^2,$$

$$16\gamma^4 \operatorname{tg}^2 \varphi = \left[(m-r)^2 + s^2 + n^2\right]^2 - 4s^2 n^2,$$

d'où

$$\sin^2 2\varphi = 1 - \frac{4s^2 n^2}{[(m-r)^2 + s^2 + n^2]^2},$$

et par suite

(24). . . . . $\cos 2\varphi = \frac{2sn}{(m-r)^2 + s^2 + n^2},$

valeur positive et plus petite que 1 puisque

$$s^2 + n^2 > 2sn.$$

On aura donc pour $\varphi$ une valeur plus petite que 45° et par suite pour $k$ une valeur réelle et plus petite que 1.

On en déduira

$$2\gamma^2 = \left[(m - r)^2 + n^2 + s^2\right] \cos^2 \varphi,$$

ou

$$(25) \ldots \ldots \quad \gamma^2 = \frac{sn \cos^2 \varphi}{\cos 2\varphi},$$

valeur positive qui donnera pour $\gamma$ une valeur réelle.

Puisque nous pouvons toujours, dans le cas qui nous occupe, obtenir pour $k$ une valeur réelle et plus petite que 1, et pour $\gamma$ une valeur réelle en nous servant de l'expression de $p(u)$ dont nous sommes partis, on en déduit que dans ce cas le discriminant est, ainsi que nous l'avons annoncé, positif.

En résumé, lorsque les racines de la quantité sous le radical sont en évidence :

1° Si les quatre racines sont réelles et égales à $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$.

La réduction peut se faire par les formules suivantes :

$$k^2 = \frac{(x_0 - x_1)(x_2 - x_3)}{(x_0 - x_3)(x_2 - x_1)},$$

$$k'^2 = \frac{(x_0 - x_2)(x_3 - x_1)}{(x_0 - x_3)(x_2 - x_1)}, \quad (^*)$$

$$\gamma^2 = \frac{A}{4}(x_0 - x_3)(x_2 - x_1),$$

et on a alors

$$x = x_0 + \frac{r_1}{p(u) - \frac{r_2}{2}},$$

$$du = \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

(*) Les racines doivent être rangées dans un ordre tel que $k^2$, $k'^2$ et $\gamma^2$ soient tous trois positifs.

où

$$r_1 = A\,\frac{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}{4},$$

$$r_2 = A\,\frac{(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) + (x_0 - x_1)(x_0 - x_3) + (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}{6}.$$

Dans ce cas, d'ailleurs, le discriminant étant positif, on a

$$p(u) = \gamma^2 \left[\frac{1}{\operatorname{sn}^2 \gamma u} - \frac{1 + k^2}{3}\right],$$

2° S'il y a deux racines réelles, $x_0$ et $x_1$ et deux racines imaginaires, $a + bi$ et $a - bi$.

On aura

$$k = \sin\theta,$$

$$k' = \cos\theta,$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{b(x_0 - x_1)}{x_0 x_1 + a^2 + b^2 - a(x_0 + x_1)},$$

$$\gamma^2 = -\frac{Ab(x_0 - x_1)}{4 \sin 2\theta},$$

le signe de $b$, qui est arbitraire, devant être choisi de façon que

$$-Ab(x_0 - x_1) > 0.$$

On a d'ailleurs

$$x = x_0 + \frac{r_1}{p(u) - \frac{r_2}{2}},$$

$$du = \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

et

$$r_1 = A\,\frac{(x_0 - x_1)[(x_0 - a)^2 + b^2]}{4},$$

$$r_2 = A\,\frac{(x - a)^2 + b^2 + 2(x_0 - x_1)(x_0 - a)}{6}.$$

Dans ce cas, le discriminant est négatif, on a

$$p(u) = \gamma^2 \left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2\gamma u} - \frac{1+k^2}{3} - \frac{k^2k'^2\mathrm{sn}^2\gamma u}{\mathrm{dn}^2\gamma u}\right].$$

3° Si les quatre racines sont imaginaires et égales à

$$m+ni,\quad m-ni,\quad r+si,\quad r-si.$$

On aura

$$k = \mathrm{tg}\,\varphi,$$

$$k'^2 = \frac{\cos 2\varphi}{\cos^2\varphi},$$

$$\cos 2\varphi = \frac{2sn}{(m-r)^2+s^2+n^2},$$

$$\gamma^2 = \frac{sn\cos^2\varphi}{\cos 2\varphi}.$$

On aura dans ce cas

$$x = -\frac{B}{A} + \frac{1}{2}\frac{p'(u)-p'(v)}{p(u)-p(v)},$$

$$du = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{R(x)}}dx,$$

où

$$-\frac{B}{A} = \frac{m+r}{2},$$

$$p(v) = \frac{(m-r)^2}{12} - \frac{n^2+s^2}{6},$$

$$p'(v) = \frac{(n^2-s^2)(m-r)}{4},$$

On a de plus

$$\frac{dx}{du} = p(u) - p(u+v)$$

et le discriminant étant positif

$$p(u) = \gamma^2\left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2\gamma u} - \frac{1+k^2}{3}\right],$$

## X. — *Applications.*

Pour rendre plus facile l'intelligence des méthodes précédentes, nous allons donner quelques applications.

*Première application.* — Mouvement du pendule circulaire dans l'air lorsque l'on suppose la résistance proportionnelle au carré de la vitesse.

Soit

$-\alpha$ l'angle d'écart initial;

$\theta$ l'angle d'écart à un instant quelconque;

$gn\frac{d\theta^2}{dt^2}$ la résistance de l'air;

$g$ désignant l'accélération de la pesanteur;

$l$ la longueur du pendule

$$A^2 = \frac{g}{l}.$$

L'équation du pendule circulaire sera alors

$$(1) \quad \dots \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + A^2\left(\sin\theta + n\frac{d\theta^2}{dt^2}\right) = 0.$$

On sait que cette équation ne doit être appliquée qu'à *une seule oscillation*, puisque lorsque la vitesse change de signe il doit en être de même de la résistance, tandis que l'expression $gn.\frac{d\theta^2}{dt^2}$ garde un signe invariable.

Si l'on pose

$$u = \frac{d\theta^2}{dt^2},$$

l'équation (1) devient

$$(2) \dots \quad \frac{du}{d\theta} + 2nA^2u + 2A^2\sin\theta = 0;$$

en tenant compte de ce fait que $u$ doit être nul pour $\theta = -\alpha$, on obtient pour l'intégrale de l'équation (2)

$$u = \frac{2A^2}{1 + 4n^2A^4}\left[\cos\theta - 2nA^2\sin\theta - (\cos\alpha + 2nA^2\sin\alpha)e^{-2nA^2(\theta+\alpha)}\right].$$

Posons maintenant

$$\varphi(\theta) = \cos\theta - 2nA^2\sin\theta - (\cos\alpha + 2nA^2\sin\alpha)\, e^{-2nA^2(\theta+\alpha)}.$$

Nous aurons

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sqrt{\frac{2A^2}{1 + 4n^2A^4}}\, dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\varphi(\theta)}},$$

$\varphi(\theta)$ est nul pour $\theta = -\alpha$, il devient de nouveau nul pour une valeur $\beta$ plus petite que $\alpha$ mais peu différente, $n$ étant très petit.

Cette valeur $\beta$ satisfait à l'équation

$$(4) \qquad \cos\beta - 2nA^2\sin\beta - (\cos\alpha + 2nA^2\sin\alpha)\, e^{-2nA^2(\beta+\alpha)} = 0.$$

On a d'ailleurs

$$\varphi'(\theta) = -\sin\theta - 2nA^2\cos\theta + 2nA^2(\cos\alpha + 2nA^2\sin\alpha)\, e^{-2nA^2(\theta+\alpha)},$$

d'où

$$\varphi'(-\alpha) = \sin\alpha\,(1 + 4n^2A^4),$$

puis

$$\varphi'(\beta) = -\sin\beta - 2nA^2\cos\beta + 2nA^2(\cos\alpha + 2nA^2\sin\alpha)\, e^{-2nA^2(\beta+\alpha)},$$

ou en tenant compte de (4)

$$\varphi'(\beta) = -\sin\beta\,(1 + 4n^2A^4).$$

Cherchons encore, avant d'aller plus loin, l'expression de $\beta$ en fonction de $n$, nous poserons pour cela, en négligeant les termes en $n^3$ :

$$\beta = \alpha - \varepsilon,$$

et

$$\varepsilon = \mu_1 n + \mu_2 n^2,$$

remplaçant dans (4) $\beta$ par cette valeur et égalant à zéro les coefficients des différentes puissances de $n$, nous aurons

$$(5). \quad . \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = 4A^2(1 - \alpha\cot\alpha), \\ \mu_2 = -8A^4(1 - \alpha\cot\alpha)\left[\alpha - \cot\alpha\,(1 - \alpha\cot\alpha)\right]. \end{array} \right.$$

Si l'on développe ces valeurs suivant les puissances ascendantes de $\alpha$ on a

$$(5') \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{4A^2\alpha^2}{3}\left(1+\frac{\alpha^2}{15}\right), \\ \mu_2 &= -\frac{16A^4\alpha^3}{9}\left(1+\frac{\alpha^2}{5}\right). \end{aligned} \right.$$

Comme $n$ est très petit, on pourra en général négliger le terme $\mu_2 n^2$ si $\alpha$ est lui-même peu considérable, puisque $\mu_2$ contient $\alpha^3$ en facteur.

Ceci posé, écrivons l'expression (3) de la manière suivante :

$$(6) \quad . \; . \quad \sqrt{\frac{2A^2}{1+4n^2A^4}}\,dt = \frac{d\theta}{\sqrt{f(\theta)}}\left[1-\frac{f(\theta)-\varphi(\theta)}{f(\theta)}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Où nous posons

$$f(\theta) = A_0 + A_1 \cos\theta + A_2 \cos 2\theta + B_1 \sin\theta + B_2 \sin 2\theta,$$

et les coefficients étant choisis de façon que l'expression

$$\left[1-\frac{f(\theta)-\varphi(\theta)}{f(\theta)}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

puisse se développer en une série convergente.

On satisfera évidemment à cette condition :

1° En choisissant $f(\theta)$ de façon que pour $n = 0$ on ait $f(\theta) = \varphi(\theta)$, car alors $f(\theta) - \varphi(\theta)$ contenant $n$ en facteur $\frac{f(\theta)-\varphi(\theta)}{f(\theta)}$ sera très petit tant que $f(\theta)$ ne sera pas lui-même très voisin de zéro.

2° En imposant à $f(\theta)$ les quatre conditions

$$\begin{aligned} f(-\alpha) &= 0, \\ f'(-\alpha) &= \varphi'(-\alpha), \\ f(\beta) &= 0, \\ f'(\beta) &= \varphi'(\beta), \end{aligned}$$

car alors la fraction $\frac{f(\theta)-\varphi(\theta)}{f(\theta)}$ sera nulle pour $\theta = -\alpha$ et $\theta = \beta$

3° En imposant à $f(\theta)$ la condition de ne pas avoir de racines réelles comprises entre $-\alpha$ et $\beta$.

En effet, alors, tant que $f(\theta)$ n'est pas nul, $\frac{f(\theta)-\varphi(\theta)}{f(\theta)}$ contenant en facteur $n$ qui est très petit, est lui-même très petit et, pour les valeurs qui rendent $f(\theta)$ nul, cette fraction sera égale à 0.

Donc l'expression

$$\left[1-\frac{f(\theta)-\varphi(\theta)}{f(\theta)}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

se développera en série toujours convergente.

Nous remarquons d'ailleurs que la fraction $\frac{f(\theta)-\varphi(\theta)}{f(\theta)}$ peut le plus souvent être négligée.

En effet, d'après ce que nous avons dit, elle contient en facteur $n$, et de plus $f(\theta)$ et $\varphi(\theta)$ ayant ainsi que $f'(\theta)$ et $\varphi'(\theta)$ la même valeur pour $\theta=-\alpha$ et $\theta=\beta$, la différence $f(\theta)-\varphi(\theta)$ sera de l'ordre de $\theta^4$, de sorte que si l'on ne tient pas compte de la fraction en question on ne néglige que les termes de l'ordre de $n\,\alpha^4$.

Passons maintenant à la détermination de $f(\theta)$.

Nous poserons d'abord

$$z=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},\quad a=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\quad b=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},$$

$f(\theta)$ prendra alors la forme suivante

$$(7)\quad f(\theta)=F(z)=M\frac{(z+a)(b-z)(z^2+2Bz+C)}{(1+z^2)^2},$$

M, B et C étant trois nouvelles constantes.

Mais l'on a

$$f'(\theta)=F'(z)\frac{dz}{d\theta}=\frac{1+z^2}{2}F'(z)$$

et les conditions que nous avons imposées à $f(\theta)$, savoir

$$f'(-\alpha)=\varphi'(-\alpha)=\sin\alpha(1+4n^2A^4),$$
$$f'(\beta)=\varphi'(\beta)=-\sin\beta(1+4n^2A^4),$$

nous donneront

$$\frac{M(b+a)(a^2-2Ba+C)}{2(1+a^2)} = \frac{2a}{1+a^2}(1+4n^2A^4),$$

$$\frac{M(b+a)(b^2+2Bb+C)}{2(1+b^2)} = \frac{2b}{1+b^2}(1+4n^2A^4).$$

Posons maintenant, en désignant par $\lambda$ une nouvelle constante,

$$\frac{4(1+4n^2A^4)}{M(b+a)} = \lambda(b+a).$$

Les deux équations précédentes deviendront

$$(8) \quad \ldots \quad \begin{cases} C - 2Ba = a\lambda(a+b) - a^2, \\ C + 2Bb = b\lambda(a+b) - b^2. \end{cases}$$

On pourrait pour achever de déterminer les trois constantes B, C et $\lambda$ imposer une nouvelle condition à $f(\theta)$, par exemple $f(0) = \varphi(0)$, mais cela conduirait à des valeurs très compliquées pour les constantes, et nous terminerons la détermination comme il suit :

Pour $n = 0$, $\varphi(\theta)$ se réduit à $\cos\theta - \cos\alpha$; on a donc pour $n = 0$

$$\varphi(\theta) = f(\theta) = \cos\theta - \cos\alpha,$$

et par suite

$$F(z) = 2\frac{a^2 - z^2}{(1+a^2)(1+z^2)}$$

ou

$$F(z) = \frac{2}{1+a^2}\frac{(z+a)(a-z)(z^2+1)}{(1+z^2)^2};$$

donc pour $n = 0$, condition qui entraine $a = b$, on a $C = 1$.

Nous prendrons dans le cas général

$$C = 1,$$

et alors les équations (8) donnent

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{1+ab}{2ab}, \\ B = -\dfrac{1-ab}{4ab}(a-b). \end{cases}$$

On en déduit

$$M = \frac{8ab(1+4n^2A^4)}{(1+ab)(a+b)^2}.$$

Vérifions que $F(z)$ satisfait aux autres conditions qu'il doit encore remplir.

1° Il doit se réduire à $\varphi(\theta)$ pour $n=0$, ce qui exige que pour $a=b$ et $n=0$ on ait

$$M = \frac{2}{1+a^2} \quad \text{et} \quad B=0,$$

ce qui a lieu en effet;

2° $F(z)$ ne doit pas avoir de racines réelles comprises entre $-a$ et $b$; or comme $C=1$ et que $B$ est très petit puisqu'il contient $n$ en facteur, les deux racines de l'équation

$$z^2+2Bz+C=0,$$

sont imaginaires et $F(z)=0$ n'a pas d'autres racines réelles que $a$ et $b$.

$f(\theta)$ remplit donc bien toutes les conditions qui lui ont été imposées.

Notre équation (6) deviendra alors en remplaçant $f(\theta)$ par sa valeur en fonction de $z$ et $d\theta$ par $\frac{2\,dz}{1+z^2}$

$$(10) \quad A\,dt = \frac{a+b}{2}\sqrt{\frac{1+ab}{ab}}\,\frac{dz}{\sqrt{(z+a)(b-z)(z^2+2Bz+1)}}\left[1+\frac{\Phi(z)}{2}+\frac{1.3}{2.4}\Phi^2(z)+\cdots\right],$$

en posant

$$\Phi(z) = \frac{f(\theta)-\varphi(\theta)}{f(\theta)}.$$



Nous allons maintenant réduire aux fonctions $p$ la différentielle

$$\frac{dz}{\sqrt{(z+a)(b-z)(z^2+2Bz+1)}}.$$

Les racines sont ici en évidence et il y a deux racines réelles et deux imaginaires.

En nous reportant aux formules du paragraphe IX, 2[e] cas, nous aurons

$$x_0 = -a, \quad x_1 = b, \quad A = -1, \quad a = -B, \quad b = \pm\sqrt{1-B^2}$$

on aura par suite, en prenant le signe — pour $b$ devant le radical de façon que $\gamma^2$ soit positif

$$(11) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \operatorname{tg} 2\theta = \frac{(a+b)\sqrt{1-B^2}}{1-B(a-b)-ab},$$

$$(12) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \gamma^2 = \frac{(a+b)\sqrt{1-B^2}}{4\sin 2\theta},$$

puis

$$\sin\theta = k, \qquad r_1 = \frac{(a+b)(a^2-2aB+1)}{4},$$

$$\cos\theta = k', \qquad r_2 = -\frac{a^2-2aB+1+2(a+b)(a-B)}{6},$$

ou à cause des équations (8) et (9)

$$r_1 = \frac{a\lambda(a+b)^2}{4} = \frac{(1+ab)(a+b)^2}{8b},$$

$$r_2 = -\frac{a+b}{12ab}\left[2a(1+2ab)-b(1-ab)\right],$$

et enfin

$$z = -a + \frac{r_1}{p(u) - \frac{r_2}{2}}.$$

Resterait à calculer les termes dépendant de $\Phi$ $(z)$, mais nous laisserons cette question de côté ne voulant donner qu'un



exemple de l'emploi des formules, et pour terminer nous allons chercher la variation de la durée de l'oscillation lorsqu'on néglige les termes en $n^2$.

Si on néglige les termes en $n^2$, on devra négliger $B^2$ et $(a-b)B$, qui contiennent cette quantité en facteur, de sorte que l'on aura par la formule (11)

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{a+b}{1-ab} = \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2},$$

d'où

$$\theta = \frac{\alpha+\beta}{4} = \frac{\alpha}{2} - \frac{\varepsilon}{4},$$

puis

$$\gamma^2 = \frac{a+b}{4 \sin 2\theta} = \frac{1}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}},$$

$$\frac{a+b}{2} \sqrt{\frac{1+ab}{ab}} = \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sqrt{\frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha \sin\beta \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2}}}.$$

Donc en négligeant toujours les termes en $n^2$ et par suite en $\varepsilon^2$

$$\frac{a+b}{2\gamma} \sqrt{\frac{1+ab}{ab}} = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \frac{1}{\sqrt{\sin\alpha \sin\beta}},$$

ou

$$\frac{a+b}{2\gamma} \sqrt{\frac{1+ab}{ab}} = (2 - \varepsilon \cot\alpha)(1 - \varepsilon \cot\alpha)^{-\frac{1}{2}} = 2.$$

De sorte que la durée de l'oscillation sera

$$\frac{a+b}{2A} \sqrt{\frac{1+ab}{ab}} K = \frac{2K_1}{A},$$

en posant

$$K\gamma = K_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}.$$



Mais

$$k = \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\right) = \sin\frac{\alpha}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Désignons par $k_1$ et $k'_1$ les valeurs de $k$ et $k'$ dans le vide, nous aurons

$$k = k_1 - \frac{\varepsilon}{4}k'_1 = k_1 - \frac{A^2\alpha^2}{3}nk'_1,$$

en nous bornant pour $\varepsilon$ à son premier terme.

Si nous désignons maintenant par $K_2$ la valeur de $K_1$ dans le vide,

$$K_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2\varphi}},$$

et $\varepsilon$ étant très petit nous prendrons, ce qui sera exact aux termes en $n^2$ près,

$$K_1 = K_2 - \frac{A^2\alpha^2}{3}nk'_1\frac{dK_2}{dk_1}.$$

Or, on a généralement

$$\frac{dK_2}{dk_1} = k_1\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{(1 - k_1^2\sin^2\varphi)\sqrt{1 - k_1^2\sin^2\varphi}} = k_1\int_0^{K_2}\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u}du.$$

Mais

$$\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u} = \frac{1}{k_1'^2}\operatorname{cn}^2(u + K_2),$$

ou comme

$$\operatorname{cn}^2(u + K_2) = 1 - \frac{k_1^2\operatorname{sn}^2(u + K_2)}{k_1^2},$$

$$\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u} = \frac{1}{k_1'^2}\left[1 - \frac{1}{k_1^2}\frac{J_2}{K_2} + \frac{1}{k_1^2}D_u\frac{\Theta'(u + K_2)}{\Theta(u + K_2)}\right],$$

et intégrant de 0 à $K_2$ on aura

$$\frac{dK_2}{dk_1} = \frac{k_1}{k_1'^2}\left[K_2 - \frac{J_2}{k_1^2}\right]$$

Mais en nous bornant au premier terme des développements de $J_2$ et $K_2$ suivant les puissances de $k_1$

$$K_2 = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2 + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 k_1^4 + \cdots\right],$$

$$J_2 = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}k_1^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^4 + \frac{5}{6}\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 k_1^6 + \cdots\right],$$

nous aurons

$$\frac{dK_2}{dk_1} = \frac{\pi}{4}\frac{k_1}{k_1'^2}.$$

Donc

$$K_1 = K_2 - \frac{\pi}{12} nA^2\alpha^2 \frac{k_1}{k_1'}.$$

Mais

$$\frac{k_1}{k_1'} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

On a donc en se bornant toujours au premier terme

$$K_1 = K_2 - \frac{\pi}{24} nA^2\alpha^3,$$

et l'oscillation, au lieu d'avoir une durée de $2\frac{K_2}{A}$ comme dans le vide, en a une de

$$\frac{2K_2}{A} - \frac{\pi}{12} nA\alpha^3.$$

Par suite de la résistance, la durée $d$ est diminuée de

$$\frac{\pi}{12} n\alpha^3 \sqrt{\frac{g}{l}},$$

quantité qui sera négligeable dès que $\alpha$ sera un peu petit à cause du facteur $n$.

*Deuxième application.* — Prenons comme deuxième application le problème traité par M. Gilbert dans les *Annales de la Société scientifique*, tome VI, pages 348 et suivantes.



Mouvement d'un point pesant sur un cercle qui tourne avec une vitesse angulaire constante autour d'un axe vertical situé dans son plan.

L'équation de ce mouvement est

$$t = \pm \int_{v_0}^{v} \frac{2dv}{\sqrt{l(1+v^2)^2 + 4\omega^2 v^2 + \frac{2g}{r}(1-v^4) - 4\frac{\omega^2\Delta}{r}(1+v^2)v}},$$

où

$r$ est le rayon du cercle,

$\Delta$ la distance du centre du cercle à l'axe,

$\zeta$ l'angle que fait le pendule à l'époque $t$ avec la verticale dirigée du centre O du cercle vers le bas,

$\omega$ la vitesse angulaire constante de la rotation du plan du cercle,

$g$ l'accélération de la pesanteur,

et où l'on a posé de plus

$$\operatorname{tg}\frac{\zeta}{2} = v,$$

$$l = -\omega^2 \sin^2\zeta_0 - \frac{2g}{r}\cos\zeta_0 + \frac{2\omega^2\Delta}{r}\sin\zeta_0.$$

Posons de plus pour simplifier l'écriture

$$a = \operatorname{tg}\frac{\zeta_0}{2}, \quad \frac{g}{r} = \lambda, \quad \frac{\Delta}{r} = \mu.$$

La quantité sous le radical s'écrira alors

$$(l - 2\lambda)v^4 - 4\omega^2\mu v^3 + 2(l + 2\omega^2)v^2 - 4\omega^2\mu v + l + 2\lambda.$$

De sorte qu'ici en se reportant aux formules générales du paragraphe (II)

$$A = l - 2\lambda, \quad B = -\omega^2\mu, \quad C = \frac{1}{3}(l + 2\omega^2)$$

$$B' = -\omega^2\mu, \quad A' = l + 2\lambda.$$



Ici il y a une racine en évidence, c'est celle qui correspond à $v = a$, puisque $l$ a été pris précisément de façon que pour cette valeur de $v$ la quantité sous le radical soit nulle.

Ce sont donc les formules (28) et suivantes du paragraphe II qu'il y aura à employer.

Nous avons d'abord par les formules (28)

$$g_2 = \frac{1}{\alpha^2}(AA' + 3C^2 - 4BB') = \frac{4}{3\alpha^2}\left[l(l + \omega^2) - 3\lambda^2 + \omega^4(1 - 3\mu^2)\right],$$

$$g_3 = \frac{1}{\alpha^3}(AA'C + 2BB'C - C^3 - AB'^2 - A'B^2)$$

$$= \frac{4}{27\alpha^3}\left[(l + 2\omega^2)\left[(2l - \omega^2)\, l - \omega^4 - 9\lambda^2\right] + 9\mu^2\omega^4(\omega^2 - l)\right].$$

On aura ensuite par les formules (30′) et (30″)

$$v = a + \frac{r_1}{\alpha\left[p(u) - \frac{r_2}{2\alpha}\right]},$$

$$\frac{dv}{du} = -\frac{r_1 p'(u)}{\alpha\left[p(u) - \frac{r_2}{2\alpha}\right]^2}$$

et prenant $t = 0$ pour $u = 0$

$$t = \frac{2u}{\sqrt{\alpha}},$$

D'ailleurs

$$r_1 = \frac{1}{4}\frac{dR(a)}{da} = (l - 2\lambda)\, a^3 - 3\mu\omega^2 a^2 + (l + 2\omega^2)\, a - \omega^2\mu,$$

$$r_2 = \frac{1}{3}\frac{dr_1}{da} = (l - 2\lambda)\, a^2 - 2\mu\omega^2 a + \frac{1}{3}(l + 2\omega^2).$$

La réduction se trouve donc terminée, mais il semble difficile de pouvoir déterminer dans le cas général le signe du discriminant; aussi nous bornerons-nous à des applications numériques qui feront mieux saisir, d'ailleurs, l'emploi des formules.

Mais avant de le faire, nous ferons remarquer qu'il y a un cas



non compris dans les formules précédentes, c'est celui où la vitesse initiale du pendule serait assez grande pour que le mouvement, au lieu d'être oscillatoire, se fasse toujours dans le même sens.

Ce cas se présentera en particulier si $l$, au lieu d'avoir la valeur donnée ci-dessus, avait une valeur positive assez grande.

Dans ce cas, la quantité sous le radical ne devenant nulle pour aucune valeur réelle de $v$, on ne pourrait mettre de racines en évidence et il faudrait recourir aux formules (17) et (18′) du paragraphe (II); comme dans ce cas $\alpha = A$, les formules (6) donneraient d'abord pour $g_2$ et $g_3$ les mêmes valeurs que plus haut où l'on devrait seulement remplacer $\alpha$ par A. On aurait donc

$$g_2 = \frac{4}{3A^2}\left[l(l+\omega^2) - 3\lambda^2 + \omega^4(1-3\mu^2)\right],$$

$$g_3 = \frac{4}{27A^3}\left[(l+2\omega^2)\left[(2l-\omega^2)l - \omega^4 - 9\lambda^2\right] + 9\omega^4\mu^2(\omega^2 - l)\right].$$

On aura alors

$$v = \frac{\omega^2\mu}{l-2\lambda} + \frac{1}{2}\frac{p'(u)-p'(v)}{p(u)-p(v)},$$

$$\frac{dv}{du} = p(u) - p(u+v),$$

$$t = \frac{2u}{\sqrt{l-2\lambda}},$$

$$p(v) = \frac{B^2 - AC}{A^2} = \frac{\omega^4\mu^2 - \frac{1}{3}(l-2\lambda)(l+2\omega^2)}{(l-2\lambda)^2},$$

$$p'(v) = \frac{A^2B' - 3ABC + 2B^3}{A^3} = \omega^2\mu\,\frac{(l-2\lambda)(l+2\omega^2) - 2\omega^4\mu^2 - (l-2\lambda)^2}{(l-2\lambda)^3}.$$

Remarquons qu'ici $l - 2\lambda$ est forcément positif puisque le polynôme sous le radical, qui ne devient par hypothèse nul pour aucune valeur réelle de $v$, doit garder le signe de son premier terme et qu'il faut par suite que ce premier terme soit positif.

Nous allons faire maintenant deux applications numériques des formules ci-dessus.



Soit d'abord

$$\zeta_0 = 210^0 = 180^0 + 30^0,$$

$$\omega = 4,$$

$$\lambda = \frac{g}{r} = 6\sqrt{3},$$

$$\mu = \frac{\Delta}{r} = \frac{3}{4}.$$

On déduit de ces données

$$\sin \zeta_0 = -\frac{1}{2}, \quad \cos \zeta_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\lambda^2 = 108, \quad \mu^2 = \frac{9}{16},$$

et l'on a par suite

$$l = 2, \quad \alpha^2 g_2 = -\frac{4^4}{3}\cdot 464, \quad \alpha^3 g_3 = -\frac{4}{27}\cdot 24{,}424,$$

$g_2$ étant négatif, le discriminant est négatif, de plus, la quantité $a$ du paragraphe VI est positive et il faudra donc se servir des formules (8), (5), (13) et (18) de ce paragraphe.

La formule (8) peut s'écrire

$$\text{tg}\, 2\psi = \sqrt{\frac{-(g_2\alpha^2)^3}{27\,(g_3\alpha^3)^2}}.$$

Ce qui donne ici

$$\text{tg}\, 2\psi = \sqrt{\frac{4^3.\overline{464}^3.27^2}{3^3.27.4^2.\overline{24{,}424}^2}} = \frac{\sqrt{\overline{464}^3}}{12{,}212},$$

On aura donc

Calcul de tg $2\psi$ formule (8)

$$\begin{aligned}
\log 464 &= 2{,}6665180 \\
\log \overline{464}^3 &= 7{,}9995540 \\
\log \sqrt{\overline{464}^3} &= 3{,}9997770 \\
\log 12212 &= 4{,}0867868 \\
\log \text{tg}\, 2\psi &= \bar{1}{,}9129902 \\
2\psi &= 39^\circ 17' 34'',54
\end{aligned}$$

et de suite pour l'emploi des formules (13) et (18)

$$\log \sin 2\psi = \bar{1},8016509$$

Calcul de $\varphi$, formule (5), $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \psi}$

$$\psi = 19^\circ 38' 37'',27$$

$$\log \operatorname{tg} \psi = \bar{1},5527523$$
$$\log \operatorname{tg} \varphi = \bar{1},8509108$$

$$\varphi = 35^\circ 21' 11'',19$$
$$2\varphi = 70^\circ 42' 22'',38$$

$$\log \sin 2\varphi = \bar{1},9748969$$

et pour l'emploi de la formule (13)

$$\log \sin^3 2\varphi = \bar{1},9246907$$

Calcul de $\theta$, formule (13), $\sin 2\theta = \sqrt{\frac{\sin 2\psi}{\sin^3 2\varphi}}$

$$\log \sin 2\psi = \bar{1},8016\,509$$
$$\log \sin^3 2\varphi = \bar{1},9246\,907$$
$$\log \sin^2 2\theta = \bar{1},8769\,602$$
$$\log \sin 2\theta = \bar{1},9384\,801$$

D'ailleurs comme

$$g_3 < 0,$$

on doit avoir

$$\cos 2\theta < 0$$

ou

$$2\theta > 90^\circ.$$

On aura donc

$$180^\circ - 2\theta = 60^\circ 13' \ 4'',5$$
$$90^\circ - \theta = 30^\circ \ 6' 32'',25$$
$$\theta = 59^\circ 53' 27'',75$$

Passons maintenant au calcul de $\gamma$, mais comme le facteur $\alpha$

est encore arbitraire, nous allons en disposer de façon que $\gamma$ soit égal à 1.

On a, formule (18),

$$\gamma = \sqrt[4]{\frac{-g_2 \sin 2\varphi}{4 \sin 2\psi}},$$

ce que nous pouvons écrire

$$\frac{1}{\gamma\sqrt{\alpha}} = \sqrt[4]{\frac{-4 \sin 2\psi}{g_2\alpha^2 \sin 2\varphi}},$$

$\gamma$ sera donc égal à 1 si nous prenons

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt[4]{\frac{-4 \sin 2\psi}{g_2\alpha^2 \sin 2\varphi}}.$$

Nous aurons donc ici

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt[4]{\frac{3 \sin 2\psi}{464 \sin 2\varphi}}.$$

Calcul de $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

On a

$$\begin{aligned}
\log 3 &= 0{,}477\,1213 \\
\log \sin 2\psi &= \bar{1}{,}801\,6509 \\
-\log 464 &= \bar{3}{,}333\,4820 \\
-\log \sin 2\varphi &= 0{,}025\,1031 \\
\hline
\log \frac{1}{\alpha^2} &= \bar{3}{,}637\,5573 \\
\log \frac{1}{\sqrt{\alpha}} &= \bar{1}{,}409\,3393 \\
\frac{1}{\sqrt{\alpha}} &= 0{,}256\,649.
\end{aligned}$$

Tous les éléments sont maintenant connus et on trouverait les valeurs des périodes ainsi que des exponentielles $q$ et $p$.

Nous allons les calculer directement, mais comme $\theta$ est plus

grand que 45°, nous calculerons d'abord $p$ et K'. Nous devrons par suite, dans les formules (3), (4) et (5) du § VII, remplacer $\theta$ par $90° - \theta$, $q$ par $p$ et $K_1$ par $K'_1$.

D'ailleurs, ici, comme $\gamma = 1$, $K_1 = K$.

Calcul de $z$, formule (3), qui devient ici, en remplaçant $\theta$ par $90° - \theta$,

$$\cos z = \sqrt{\sin\theta}$$
$$\theta = 59°53'27'',75$$
$$\log\sin\theta = \bar{1},9370\,528$$
$$\log\cos z = \bar{1},9685\,264$$
$$z = 21°33'\ 2'',41$$
$$\frac{z}{2} = 10°46'31'',20.$$

Puis, pour les calculs suivants,

$$\log \operatorname{tg}\frac{z}{2} = \bar{1},2794\,709$$
$$\log\cos\frac{z}{2} = \bar{1},9922\,741$$
$$\log\cos^4\frac{z}{2} = \bar{1},9690\,964.$$

Calcul de $p$.

Nous avons ici, formule (4),

$$p = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{z}{2} + \frac{1}{2^4}\operatorname{tg}^{10}\frac{z}{2} = u_1 + u_2;$$

le terme suivant, qui est $\frac{15}{2^9}\operatorname{tg}^{18}\frac{z}{2}$, pourra être négligé.

Calculons les deux premiers termes $u_1$ et $u_2$ :

$$\log\frac{1}{2} = \bar{1},6989700$$
$$\log\operatorname{tg}^2\frac{z}{2} = \bar{2},5589418$$
$$\log u_1 = \bar{2},2579118$$
$$u_1 = 0,01810972,$$

— 82 —

puis

$$\log \frac{1}{2^4} = \bar{2},7958800$$

$$\log \operatorname{tg}^{10} \frac{z}{2} = \bar{8},7947090$$

$$\log u_2 = \bar{9},5905890$$

$$u_2 = 0,000000004,$$

et $u_2$ sera lui-même sans influence sur les huit premières décimales; nous aurons donc, en négligeant $u^2$,

$$p = 0,01810972.$$

Calcul de K', formule (5),

$$K' = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1 + 2p^4 + 2p^{16}}{\cos^2 \frac{z}{2}}\right]^2.$$

Mais $p$ étant égal à $u_1$, nous voyons que les termes en $p^8$ seront négligeables, et on pourra prendre

$$K' = \frac{\pi}{2}\frac{1 + 4p^4}{\cos^4 \frac{z}{2}}.$$

Mais

$$\log 4 = 0,6020\,600$$

$$\log p^4 = \bar{7},0316\,472$$

$$\log 4p^4 = \bar{7},6337\,072$$

$$4p^4 = 0,0000\,0043$$

$$1 + 4p^4 = 1,0000\,0043.$$

On a ensuite

$$\log \pi = 0,497\,1499$$

$$\log(1 + 4p^4) = 0,000\,0002$$

$$\log \frac{1}{2} = \bar{1},698\,9700$$

$$-\log \cos^4 \frac{z}{2} = 0,030\,9036$$

$$\log K' = 0,227\,0237$$

$$K' = 1,686\,645,$$



Calcul de $q$.

On aura ici, formule (8),

$$\log\log\left(\frac{1}{q}\right) = 2\log M + 2\log\pi - \log\log\left(\frac{1}{p}\right);$$

on a trouvé

$$\log p = \bar{2},257\ 9118,$$

donc

$$\log\frac{1}{p} = 1,742\ 0882$$

$$\log\log\left(\frac{1}{p}\right) = 0,241\ 0702.$$

D'ailleurs,

$$\log\pi = 0,497\ 1499$$

$$\log M = \bar{1},637\ 7843,$$

donc

$$2\log M = \bar{1},275\ 5686$$

$$2\log\pi = 0,994\ 2998$$

$$-\log\log\left(\frac{1}{p}\right) = \bar{1},758\ 9298$$

$$\log\log\left(\frac{1}{q}\right) = 0,028\ 7982$$

$$\log\left(\frac{1}{q}\right) = 1,068\ 5582$$

$$\log q = \bar{2},931\ 4418$$

$$q = 0,085\ 3968.$$

Calcul de K.

On aura, formule (9), en changeant K et $q$ en K' et $p$, et réciproquement,

$$\log K = \log K' + \log\log\left(\frac{1}{p}\right) - \log M - \log\pi,$$

$$\log K' = 0,227\ 0237$$

$$\log\log\left(\frac{1}{p}\right) = 0,241\ 0702$$

$$-\log M = 0,362\ 2157$$

$$-\log\pi = \bar{1},502\ 8501$$

$$\log K = 0,333\ 1597$$

$$K = 2,153\ 574.$$



Calcul de J', formule (12).

Les termes en $p^6$ étant négligeables, nous prendrons, puisque $\gamma = 1$,

$$J' = \frac{\pi^2}{4K'} \frac{1 + 9p^2}{1 + p^2}.$$

Mais

$$\log p^2 = \bar{4},515\,8236$$
$$p^2 = 0,0003\,2796$$
$$9p^2 = 0,0029\,5164.$$

donc

$$1 + p^2 = 1,0003\,2796$$
$$1 + 9p^2 = 1,0029\,5164$$

et enfin

$$2 \log \pi = 0,994\,2998$$
$$\log \frac{1}{4} = \bar{1},397\,9400$$
$$\log (1 + 9p^2) = 0,001\,2800$$
$$- \log (1 + p^2) = \bar{1},999\,8576$$
$$- \log K' = \bar{1},772\,9763$$
$$\log J' = 0,166\,3537$$
$$J' = 1,466\,742.$$

Calcul de J, formule (13),

$$J = \frac{J'K}{K'} - \frac{\pi}{2K'},$$

puisque $\gamma = 1$.

$$\log J' = 0,166\,3537$$
$$\log K = 0,333\,1597$$
$$- \log K' = \bar{1},772\,9763$$
$$\log \frac{J'K}{K'} = 0,272\,4897$$
$$\log \pi = 0,497\,1499$$
$$\log \frac{1}{2} = \bar{1},698\,9700$$
$$- \log K' = \bar{1},772\,9763$$
$$\log \frac{\pi}{2K'} = \bar{1},969\,0962$$

$$\frac{J'K}{K'} = 1{,}872\,793$$

$$\frac{\pi}{2K'} = 0{,}931\,314$$

$$J = 0{,}941\,479$$

Nous avons, dans les calculs précédents, bien tenu compte des termes en $p^4$, mais ces calculs font voir que, si l'on n'a pas besoin d'une grande approximation, on pourra négliger les termes en $p^4$ et même le plus souvent ceux en $p^2$.

On aura alors

$$p(u) = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} - \frac{1 + k^2}{3} - k^2 k'^2 \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u},$$

ou

$$p(u) = -k\frac{\vartheta^2(u)}{\vartheta_1^2(u)} - \frac{1 + k^2}{3} + kk'\frac{\vartheta_1^2(u)}{\vartheta_3^2(u)}.$$

En négligeant les termes en $p^4$, on a

$$\vartheta_3(u) = 1 + 2p\cos\frac{\pi u}{iK'},$$

$$\vartheta(u) = 1 - 2p\cos\frac{\pi u}{iK'},$$

$$\vartheta(u) = 2p^{\frac{1}{4}}\cos\frac{\pi u}{2iK'}\left[1 + p^2\left(2\cos\frac{\pi u}{iK'} - 1\right)\right],$$

$$\vartheta_1(u) = -2p^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi u}{2iK'}\left[1 - p^2\left(1 + 2\cos\frac{\pi u}{iK'}\right)\right],$$

d'où l'on conclut une expression assez simple pour $p(u)$.

Dans la plupart des cas, on pourra même négliger les termes en $p^2$.

Remarquons que si l'on prend les développements précédents, qui dépendent des fonctions hyperboliques, il n'aurait pas été nécessaire de calculer K, $q$, J et J'; toutefois il aurait été toujours

utile d'avoir K pour connaître la période du mouvement qui est 2K (puisque $\gamma = 1$), mais j'ai tenu à donner un exemple complet du calcul.

Comme dernier exemple de réduction pour le même problème, supposons que l'on ait

$$l = 40$$
$$\mu = 1$$
$$\lambda = 10$$
$$\omega = 4.$$

On reconnaîtra d'abord que, dans ce cas, le mouvement a toujours lieu dans le même sens ; en effet, en se reportant au mémoire en question, on voit que le carré de la vitesse angulaire du pendule est donné par la formule suivante :

$$\frac{d\zeta^2}{dt^2} = l + \omega^2 \sin^2\zeta + 2\lambda \cos\zeta - 2\omega^2\mu \sin\zeta,$$

expression qui ne peut jamais devenir nulle avec les nombres donnés ci-dessus, puisque le minimum de

$$2\lambda \cos\zeta - 2\omega^2\mu \sin\zeta$$

est

$$-2\sqrt{\lambda^2 + \omega^4\mu^2} = -2\sqrt{100 + 256} > -40.$$

Nous ne pouvons ici mettre de racines en évidence ; ce seront donc les formules (17) et (18') qu'il faudra employer, ainsi que nous l'avons indiqué plus haut.

Nous aurons d'abord

$$g_2 = \frac{4}{3A^2}\left[l(l+\omega^2) - 3\lambda^2 + \omega^4(1 - 3\mu^2)\right],$$

$$g_3 = \frac{4}{27A^3}\left[(l + 2\omega^2)[(2l - \omega^2)l - \omega^4 - 9\lambda^2] + 9\omega^4\mu^2(\omega^2 - l)\right],$$

$$A = l - 2\lambda,$$

donc ici

$$g_2 = 4\frac{119}{100}, \quad g_3 = 16\frac{53}{1000},$$



ici le discriminant est positif; il y aura donc à se servir des formules du paragraphe V.

Calcul de $\psi$, formule (3),

$$\sin\psi = \sqrt{\frac{27 g_3^2}{g_2^3}} = \sqrt{\frac{27.4.53^2}{119^3}} = 2.3.53.\sqrt{\frac{3}{119^3}},$$

ou

$$\sin\psi = 318\sqrt{\frac{3}{119^3}},$$

$$\log 119 = 2{,}075\,5470$$

or

$$\log 318 = 2{,}502\,4271$$
$$\log\sqrt{3} = 0{,}238\,5606$$
$$-\log\sqrt{119^3} = \bar{4}{,}886\,6795$$

$$\log\sin\psi = \bar{1}{,}627\,6672$$
$$\psi = 25^\circ\ 6'\ 21'',60$$
$$\frac{\psi}{3} = 8^\circ\ 22'\ 7'',20$$

comme

$$g_3 > 0,$$

$$\mu = 60^\circ - \frac{\psi}{3} = 51^\circ\ 37'\ 52''80.$$

Calcul de $\varphi$, formule (4), $\mathrm{tg}2\varphi = \sqrt{\frac{\cos\psi}{\cos^3\mu}}$, $\log\cos\mu = \bar{1}{,}7928952$

$$\log\cos\psi = \bar{1}{,}9569\,001$$
$$\log\cos^3\mu = \bar{1}{,}3786\,856$$

$$\log \mathrm{tg}^2 2\varphi = 0{,}5782\,145$$
$$\log \mathrm{tg}\,2\varphi = 0{,}2891\,073$$
$$2\varphi = 62^\circ\ 48'\ 2'',20$$
$$\varphi = 31^\circ\ 24'\ 1'',10.$$

Calcul de $k$ et $\theta$,

$$\log k = \log \mathrm{tg}\,\varphi = \bar{1}{,}7856\,216$$



et si l'on pose

$$k = \sin\theta,$$
$$\theta = 37^\circ\, 37'\, 8'',94.$$

Calcul de $\gamma$, formule (7), $\gamma = \sqrt[4]{\frac{g_2 \cos\psi}{4 \cos\mu\, \mathrm{tg}^2\varphi}}, \frac{g_2}{4} = \frac{119}{100}$,

$$\log \frac{g_2}{4} = 0{,}075\,5470$$
$$\log \cos\psi = \bar{1}{,}956\,9001$$
$$-\log \cos\mu = 0{,}207\,1048$$
$$-\log \mathrm{tg}^2\varphi = 0{,}428\,7568$$
$$\log \gamma^4 = 0{,}668\,3087$$
$$\log \gamma = 0{,}167\,0772$$
$$\gamma = 1{,}469\,187.$$

On aura d'ailleurs

$$p(v) = -0{,}56$$
$$p'(v) = 1{,}056$$
$$-\frac{B}{A} = \frac{\omega^2\mu}{l - 2\lambda} = 0{,}8,$$
$$\frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = 0{,}223607.$$

D'ailleurs

$$\log \frac{1}{\sqrt{A}} = \bar{1}{,}349\,4850.$$

Nous ne ferons pas le calcul des quantités $q$, K, etc., mais nous les déduirons des tables.

On a, dans les tables du traité de calcul intégral de M. Bertrand :

pour

$$\theta = 37^\circ\, 35', \qquad \log q = \bar{2}{,}46304$$

pour

$$\theta = 37^\circ\, 40', \qquad \log q = \bar{2}{,}46512$$

d'où pour

$$\theta = 37^\circ\, 37'\, 8'',94, \qquad \log q = \bar{2}{,}46393$$
$$q = 0{,}02910$$



On a dans les mêmes tables :

pour
$$\theta = 37^\circ\, 30', \qquad \log K_1 = 0{,}244\,9341$$
pour
$$\theta = 38^\circ, \qquad \log K_1 = 0{,}246\,3154$$
d'où pour
$$\theta = 37^\circ\, 37'\, 8'',94, \quad \log K_1 = 0{,}245\,2633$$
$$K_1 = 1{,}75899.$$

On aura ensuite
$$K = \frac{K_1}{\gamma}.$$

Donc
$$\begin{aligned} \log K_1 &= 0{,}245\,2633 \\ \log \gamma &= 0{,}167\,0772 \\ \hline \log K &= 0{,}078\,1861 \\ K &= 1{,}19725 \end{aligned}$$

On obtiendrait d'une façon semblable les valeurs de $p$ et K' qui correspondent à $90^\circ - \theta$, mais pour le cas présent ces valeurs ne présenteront pas d'intérêt puisque les séries correspondantes sont moins convergentes et que de plus elle ne mettent pas en évidence la périodicité du mouvement.

Le discriminant étant positif, on a d'ailleurs

$$p(u) = \gamma^2 \left[ \frac{1}{sn^2 \gamma u} - \frac{1 + k^2}{3} \right].$$

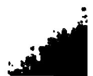
---



# TABLE DES MATIÈRES

## DE LA TROISIÈME PARTIE.





# SUR LES RELATIONS

ENTRE

# LES COEFFICIENTS CALORIMÉTRIQUES

## D'UN CORPS

PAR

M. Ph. GILBERT

Professeur à l'Université de Louvain.

---

**1.** On considère, dans la Thermodynamique, plusieurs coefficients fonctions des deux variables $v$, $p$, ou $v$, T, ou $p$, T par lesquelles on définit l'état d'un corps homogène ; ces coefficients sont définis par les égalités suivantes, dans lesquelles $dQ$ représente la chaleur absorbée dans une transformation infiniment petite :

$$(1)\quad dQ = cdT + ldv, \quad dQ = CdT + hdp, \quad dQ = Xdv + Ydp.$$

Dans quelle mesure peut-on déterminer ces coefficients $c$, C, $l$, $h$, X, Y, si l'on connait la relation qui existe, pour le corps, entre le volume $v$, la pression $p$, la température absolue T,

$$(2).\quad . \quad . \quad \varphi(v, p, T) = 0 \qquad \text{ou} \qquad T = F(v, p),$$

et par suite les dérivées partielles

$$T'_v = \frac{\partial T}{\partial v}, \qquad T'_p = \frac{\partial T}{\partial p}?$$

Il est remarquable que les uns sont déterminés complètement par cette équation (2), les autres à une fonction arbitraire de la température près, et cela tient à ce que dans les relations qui se tirent des deux principes fondamentaux et du changement

des variables, les chaleurs spécifiques C et $c$ ne figurent que par leur différence $C - c$.

En effet, on a d'abord

$$dT = T'_v dv + T'_p dp,$$

d'où

$$dQ = (cT'_v + l)dv + cT'_p dp = CT'_v dv + (CT'_p + h)dp = Xdv + Ydp,$$

et l'on a, par suite, $dv$ et $dp$ étant arbitraires,

$$cT'_v + l = CT'_v = X, \qquad cT'_p = CT'_p + h = Y,$$

ou en résolvant,

$$(3). \quad l = (C - c)T'_v, \quad h = -(C - c)T'_p, \quad X = CT'_v, \quad Y = cT'_p.$$

Ces formules se transforment d'ailleurs en d'autres équivalentes. D'autre part, les principes de Mayer et de Carnot permettent d'établir les relations bien connues, où E désigne l'équivalent mécanique de la chaleur :

$$(4). \quad \begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial p} - \dfrac{\partial h}{\partial T} = \dfrac{1}{ET'_v} = -\dfrac{h}{T}, \\ \dfrac{\partial l}{\partial T} - \dfrac{\partial c}{\partial v} = \dfrac{1}{ET'_p} = \dfrac{l}{T}, \\ \dfrac{\partial X}{\partial p} - \dfrac{\partial Y}{\partial v} = \dfrac{1}{E} = \dfrac{1}{T}(XT'_p - YT'_v). \end{cases}$$

La deuxième et la quatrième résolvent la question pour $l$, $h$,

$$(5). \quad l = \frac{T}{ET'_p}, \qquad h = -\frac{T}{ET'_v},$$

mais il n'en est plus de même pour les autres coefficients, car si l'on combine ces équations (5) avec les deux premières équations (3), ou la sixième équation (4) avec les deux dernières (3), on tombe toujours sur la même relation

$$(6) \quad C - c = \frac{T}{ET'_v T'_p},$$



insuffisante pour déterminer C, $c$ et, par suite, X, Y. Il faut donc recourir aux équations (4), aux dérivées partielles. M. Phillips (*) en a tiré une équation de cette espèce, soit pour C, soit pour $c$, et l'intégration lui a fourni ces coefficients avec une fonction arbitraire de T. Notre but est de montrer que l'on peut obtenir les résultats de M. Phillips par une voie et sous une forme peut-être plus simples, et d'en signaler quelques conséquences.

**2.** De l'équation (4)

$$\frac{\partial C}{\partial p} - \frac{\partial h}{\partial T} = -\frac{h}{T}$$

ou

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial C}{\partial p} = T\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{h}{T}\right),$$

multipliée par $dp$ et intégrée en observant que T reste constant dans cette intégration, on tire

$$C = \psi(T) + T\int \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{h}{T}\right) dp,$$

$\psi(T)$ étant une fonction arbitraire de T ; ou encore, en vertu de la seconde équation (5),

$$(8) \quad \ldots \quad C = \psi(T) - \frac{T}{E}\int \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{T'_v}\right) dp = \psi(T) - \frac{T}{E}\frac{\partial}{\partial T}\int \frac{dp}{T'_v}.$$

C'est l'équation qui donne C, à une fonction arbitraire près, lorsque l'équation (2) est connue. Il faut observer que $v$, sous le signe $\int$, est une fonction de $p$, définie par l'équation (2) où T est regardé comme constant.

Si, dans l'équation (8), on remplace la dérivation partielle par rapport à T par une autre relative à $v$, puisque l'on a, $p$ étant constant,

$$\frac{\partial}{\partial T} = \frac{1}{T'_v}\frac{\partial}{\partial v},$$

(*) *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXXXV, pp. 1290, 1351. Signalons aussi un mémoire de M. Maurice Lévy (t. LXXXIV, p. 591), où la même question est résolue, mais en prenant [illegible] comme variable indépendante. Voir aussi t. LXXXVI, p. 1391.

on trouve

$$(9).\quad C=\psi(T)-\frac{T}{E}\int\frac{1}{T'_v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{T'_v}\right)dp=\psi(T)+\frac{T}{E}\int\frac{T''_v}{T'^3_v}dp,$$

ce qui est la formule de M. Phillips ; ou encore

$$(10)\quad .\ .\ .\ .\ .\quad C=\psi(T)-\frac{T}{ET'_v}\frac{\partial}{\partial v}\int\frac{dp}{T'_v},$$

ce qui conduira probablement à une intégration plus simple.

L'équation (7) donne le moyen le plus simple de reconnaître les corps dans lesquels C ne dépend que de la température. Le premier membre devant être nul, $h:T$ ne peut dépendre que de $p$, et il en est de même de $T'_v$ d'après la seconde équation (5). On a donc

$$\frac{\partial T}{\partial v}=f(p),$$

$$(11)\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad T=vf(p)+f_1(p),$$

$f$ et $f_1$ désignant des fonctions arbitraires. L'équation caractéristique (2) devra donc appartenir à cette forme (11).

**3.** Des raisonnements analogues s'appliquent à la fonction $c$ ; on tire des équations (4)

$$\frac{\partial c}{\partial v}=T\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{l}{T}\right),\qquad c=\psi_1(T)+T\int\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{l}{T}\right)dv,$$

et en remplaçant $l:T$ par sa valeur (5) et introduisant les dérivées par rapport à $p$, on a l'une des deux formules

$$(12).\quad c=\psi_1(T)-\frac{T}{E}\int\frac{T''_p}{T'^3_p}dv,\qquad c=\psi_1(T)+\frac{T}{ET'_p}\frac{\partial}{\partial p}\int\frac{dv}{T'_p},$$

dont la première a été donnée par M. Phillips. Pour que $c$ ne soit fonction que de la température, il faut que $T'_p$ ne dépende que de $v$, et l'on a pour l'équation (2)

$$(13)\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\quad T=p\chi(v)+\chi_1(v).$$

MM. Phillips et Lévy ont montré comment on déterminerait les fonctions $\psi(T)$ et $\psi_1(T)$.

**4.** Si l'on substitue dans l'équation (6) les valeurs de C et de $c$ tirées des égalités (10) et (12), on voit facilement que l'on arrive à l'égalité

$$(14)\ldots\quad \frac{1}{T'_v}\frac{\partial}{\partial v}\int\frac{dp}{T'_v}+\frac{1}{T'_p}\frac{\partial}{\partial p}\int\frac{dv}{T'_p}+\frac{1}{T'_vT'_p}=\Phi(T),$$

$\Phi$ désignant une fonction arbitraire de T. Comme on est arrivé à cette propriété de la fonction $T = F(v, p)$ par les principes de la thermodynamique, on pourrait croire qu'elle appartient seulement à une fonction T caractéristique d'un corps, mais il est plus vraisemblable qu'elle appartient à toute fonction T de $v, p$, et constitue une relation d'analyse qu'il serait utile de vérifier directement.

**5.** L'équation (6) conduit à cette conséquence que si, dans un corps, la *différence* des chaleurs spécifiques ne dépend que de la température, la fonction $T = F(v, p)$ vérifiera la condition

$$T'_vT'_p=\varphi(T)$$

ou

$$(15)\ldots\ldots\quad \frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial p}=\varphi(T).$$

Éliminant la fonction arbitraire $\varphi(T)$, on aura

$$T'_p\frac{\partial}{\partial v}(T'_vT'_p)-T'_v\frac{\partial}{\partial p}(T'_vT'_p)=0,\qquad\text{ou}\qquad T'^2_pT''_v-T'^2_vT''_p=0,$$

ou, enfin, sous la forme la plus simple,

$$(16)\ldots\ldots\quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{T'_v}\right)-\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{T'_p}\right)=0.$$

Telle est la relation à laquelle doit satisfaire T pour que $C - c$ ne dépende que de T. On peut, du reste, intégrer l'équation (15) par la méthode de Charpit en y considérant $\varphi(T)$ comme une

fonction donnée arbitrairement. L'intégrale complète est la suivante :

$$2\sqrt{\varphi(T)} = \alpha v + \frac{p}{\alpha} + \beta,$$

d'où

$$T = \Psi\left(\alpha v + \frac{p}{\alpha} + \beta\right),$$

$\alpha$ et $\beta$ étant des constantes arbitraires, $\Psi$ une fonction arbitraire. On en déduit l'intégrale générale par la méthode connue.

**6.** Voici encore une conséquence analytique des relations trouvées ci-dessus. Introduisons comme paramètre le rapport $\gamma$ des deux chaleurs spécifiques C et $c$ ; nous aurons par la relation (6)

$$C = \frac{\gamma T}{E(\gamma-1)T'_v T'_p}, \quad c = \frac{T}{E(\gamma-1)T'_v T'_p}, \quad X = \frac{\gamma T}{E(\gamma-1)T'_p}, \quad Y = \frac{T}{E(\gamma-1)T'_v}.$$

Ces deux dernières formules permettent d'écrire la cinquième des équations (5) sous la forme

$$(17). \quad . \quad \frac{1}{T'_v}\frac{\partial \gamma}{\partial v} - \frac{1}{T'_p}\frac{\partial \gamma}{\partial p} = (\gamma - 1)\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{T'_v}\right) - \gamma \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{T'_p}\right)\right].$$

Donc, dans un corps quelconque, le rapport $\gamma$ des chaleurs spécifiques vérifie cette équation aux dérivées partielles. Mais nous avons trouvé plus haut [éq. (12)] une expression de la chaleur spécifique $c$ qui, rapprochée de celle ci-dessus, nous donne

$$\frac{T}{E(\gamma - 1)T'_v T'_p} = \psi(T) + \frac{T}{ET'_p}\frac{\partial}{\partial p_v}\int \frac{dv}{T'_p}.$$

On en déduit, $\psi_2(T)$ désignant une fonction arbitraire de T, que l'on a

$$(18) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{1}{T'_p}\left[\frac{1}{(\gamma - 1)T'_v} - \frac{\partial}{\partial p_v}\int \frac{dv}{T'_p}\right] = \psi_2(T)$$

pour l'*intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles* (17), résultat qu'il serait peut-être assez difficile de trouver directement.

---

# SUR
# LA TENSION ÉLECTRIQUE
## SUIVANT LES LIGNES DE FORCE
## DANS LES MILIEUX DIÉLECTRIQUES

PAR

**le P. Joseph DELSAULX**

Professeur au Collège de la Compagnie de Jésus
à Louvain.

---

**1.** Maxwell a démontré, le premier, l'exactitude analytique de la conception de Faraday touchant l'influence des milieux diélectriques, dans l'action des corps électrisés (*). Les résultats de l'étude mathématique du physicien anglais sont renfermés dans l'énoncé suivant :

On peut supposer qu'en chaque point d'un milieu diélectrique, interposé entre corps électrisés, il y a une tension élastique suivant les lignes de force, et une pression suivant toutes les directions perpendiculaires à ces lignes. Les valeurs numériques de la tension et de la pression sont égales en un même point, et varient toutes les deux, d'un point à un autre, comme le carré de la force résultante (**).

---

(*) *Traité d'électricité et de magnétisme*, t. I, pp. 163 à 169.

(**) *Ibidem*, p. 173. La force résultante dont il s'agit dans l'énoncé de Maxwell est la force résultante, appliquée à l'unité de masse, et déterminée d'après les calculs de l'ancienne théorie des actions à distance.

La démonstration de ce théorème, donnée par Maxwell, se trouve reproduite dans le grand traité de M. Émile Mathieu sur le potentiel (*). Toutefois, en la reproduisant, l'auteur a cru devoir la compléter. Une démonstration toute différente du même théorème a été donnée par MM. Mascart et Joubert dans leurs leçons sur l'électricité et le magnétisme (**).

L'objet de cette note est de faire connaître une démonstration nouvelle du théorème de Maxwell. Cette démonstration est simple, rigoureuse, indépendante de la théorie de l'élasticité et plus élégante, à notre sens, que les démonstrations précédentes. Elle est fondée sur le théorème de Green.

**2**. Supposons que des corps électrisés, A, B, C, D,... soient immergés dans un même diélectrique. Représentons l'élément de volume du corps A par *du*; le potentiel du système des corps électrisés A, B, C, D,... par V.

L'action exercée sur A par le reste du système peut être ramenée à l'action combinée d'une force et d'un couple.

Les composantes de la force sont exprimées par les égalités (***)

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{1}{4\pi}\int \frac{dV}{dx}\,\Delta V du, \\ Y &= \frac{1}{4\pi}\int \frac{dV}{dy}\,\Delta V du, \\ Z &= \frac{1}{4\pi}\int \frac{dV}{dz}\,\Delta V du, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$\Delta V$ étant la somme des trois dérivées partielles secondes de la fonction V par rapport aux coordonnées $x$, $y$, $z$.

(*) *Théorie du potentiel et ses applications à l'électrostatique et au magnétisme*, 2e partie, pp. 104 à 110.

(**) *Leçons sur l'électricité et le magnétisme*, t. I, pp. 105 à 109.

(***) *Théorie du potentiel et ses applications à l'électrostatique et au magnétisme*, par M. Émile Mathieu, 2e partie, p. 105.

Les composantes de l'axe du couple sont exprimées, de la même manière, par les égalités (*)

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{dV}{dy}z - \frac{dV}{dz}y\right)\Delta V du, \\ M &= \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{dV}{dz}x - \frac{dV}{dx}z\right)\Delta V du, \\ N &= \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{dV}{dx}y - \frac{dV}{dy}x\right)\Delta V du. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

La fonction $\Delta V$ (**) étant nulle dans tout l'espace qui sépare les corps électrisés, on peut étendre les intégrations indiquées dans les équations (1) et (2), du volume du corps A, au volume intérieur déterminé par une surface fermée quelconque $\sigma$ entourant le corps A, et assujettie à ne rencontrer et à n'envelopper aucun des autres corps du système. Une telle extension n'altère en aucune façon les valeurs numériques des seconds membres des équations (1) et (2).

(*) *Théorie du potentiel et ses applications à l'électrostatique et au magnétisme*, 2e partie, p. 107.

(**) Lamé appelle la fonction $\Delta V$, le paramètre différentiel du second ordre de la fonction V.

Les intégrales, mentionnées aux seconds membres des équations (1) et (2), s'étendent au volume du corps A D'après les principes de l'électro-statique on s'attend conséquemment à rencontrer, dans ces intégrales, le paramètre différentiel du second ordre du potentiel de A, mais non le paramètre différentiel du potentiel du système entier des corps électrisés.

De même, les dérivées partielles premières entrant sous le signe d'intégration semblent devoir être exclusivement celles du potentiel du système des corps électrisés agissant sur A, et non les dérivées partielles premières du potentiel du système entier des corps électrisés.

Mais il est aisé de voir qu'en étendant les potentiels au système entier des corps électrisés, dans les intégrales des seconds membres des équations (1) et (2), tant pour la formation du paramètre différentiel du second ordre que pour celle des dérivées partielles premières, on ne fait qu'introduire, sous le signe d'intégration, à côté des termes exigés par la question, ou des quantités nulles elles-mêmes, ou des quantités égales et de signes contraires, qui s'éliminent mutuellement dans la sommation.

Posons, en conséquence,

$$H = \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2,$$

et représentons par $\lambda$, $\mu$, $\nu$, les angles que la partie extérieure de la normale $n$ à l'élément $d\sigma$, de la surface $\sigma$, fait avec les axes coordonnés.

En appliquant le théorème de Green aux équations (1) étendues, ainsi qu'il vient d'être dit, au volume délimité extérieurement par la surface $\sigma$, ces équations deviennent dans le système de notations adopté,

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{1}{4\pi}\int \frac{dV}{dx}\frac{dV}{dn}\,d\sigma - \frac{1}{8\pi}\int H\cos\lambda\,d\sigma, \\ Y &= \frac{1}{4\pi}\int \frac{dV}{dy}\frac{dV}{dn}\,d\sigma - \frac{1}{8\pi}\int H\cos\mu\,d\sigma, \\ Z &= \frac{1}{4\pi}\int \frac{dV}{dz}\frac{dV}{dn}\,d\sigma - \frac{1}{8\pi}\int H\cos\nu\,d\sigma. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (3)$$

Les équations (2) deviennent, dans la même hypothèse, comme il est aisé de le voir,

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{1}{4\pi}\int \left(\frac{dV}{dy}z - \frac{dV}{dz}y\right)\frac{dV}{dn}\,d\sigma - \frac{1}{8\pi}\int H(z\cos\mu - y\cos\nu)\,d\sigma, \\ M &= \frac{1}{4\pi}\int \left(\frac{dV}{dz}x - \frac{dV}{dx}z\right)\frac{dV}{dn}\,d\sigma - \frac{1}{8\pi}\int H(x\cos\nu - z\cos\lambda)\,d\sigma, \\ N &= \frac{1}{4\pi}\int \left(\frac{dV}{dx}y - \frac{dV}{dy}x\right)\frac{dV}{dn}\,d\sigma - \frac{1}{8\pi}\int H(y\cos\lambda - x\cos\mu)\,d\sigma. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (4)$$

Une propriété fort remarquable de l'action mécanique des corps électrisés ressort des équations (3) et (4) :

Le système de la force (X, Y, Z) et du couple (L, M, N). expression de l'action résultante des corps électrisés B, C, D,.., sur le corps A, est aussi le résultat de la composition d'un système de forces appliquées aux éléments de la surface $\sigma$.

Les composantes $\xi, \eta, \zeta$ de ces forces sont déterminées, pour l'unité de surface, en chaque point $(x, y, z,)$ de la surface $\sigma$, par les égalités

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dx}\frac{dV}{dn} - \frac{1}{8\pi}\mathrm{H}\cos\lambda, \\ \eta &= \frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dy}\frac{dV}{dn} - \frac{1}{8\pi}\mathrm{H}\cos\mu, \\ \zeta &= \frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dz}\frac{dV}{dn} - \frac{1}{8\pi}\mathrm{H}\cos\nu. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Cette propriété est applicable à toutes les surfaces $\sigma$ satisfaisant aux conditions imposées ci-dessus à ces surfaces. Par suite, elle est applicable à la surface même du corps électrisé A.

De là, cette conclusion importante :

La sollicitation au mouvement, éprouvée par le corps électrisé A, peut être attribuée tout aussi bien à une modification du diélectrique ambiant, et à une action corrélative exercée sur la surface de ce corps, qu'à l'activité des corps électrisés B, C, D,... agissant à distance et atteignant, dans leur action, la masse intérieure de ce même corps.

**3.** Les forces $(\xi, \eta, \zeta,)$ déterminées par les équations (5) sont normales aux éléments $d\sigma$ qu'elles sollicitent, pour certaines orientations de ces derniers.

Ces orientations sont données par l'équation de condition

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (\xi\cos\lambda + \eta\cos\mu + \zeta\cos\nu)^2, \quad . \; . \quad (6)$$

dont la légitimité est trop évidente pour être démontrée.

La résolution de l'équation (6) se fait aisément, quand on se rappelle que

$$\frac{dV}{dn} = \frac{dV}{dx}\cos\lambda + \frac{dV}{dy}\cos\mu + \frac{dV}{dz}\cos\nu;$$

car alors, il est facile de voir que l'on a

$$\xi\cos\lambda + \eta\cos\mu + \zeta\cos\nu = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV}{dn}\right)^2 - \frac{1}{8\pi}\mathrm{H}$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{8\pi} \mathrm{H}\right)^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Dans ces circonstances, l'équation (6) se réduit à l'équation très simple

$$\left(\frac{d\mathrm{V}}{dn}\right)^2 \left[\left(\frac{d\mathrm{V}}{dn}\right)^2 - \mathrm{H}\right] = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

On peut satisfaire à l'équation (8), soit en posant

$$\left(\frac{d\mathrm{V}}{dn}\right)^2 = \mathrm{H},$$

soit en faisant

$$\frac{d\mathrm{V}}{dn} = 0.$$

La première solution exige que l'on ait

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda &= \pm \frac{1}{\sqrt{\mathrm{H}}} \frac{d\mathrm{V}}{dx}, \\ \cos\mu &= \pm \frac{1}{\sqrt{\mathrm{H}}} \frac{d\mathrm{V}}{dy}, \\ \cos\nu &= \pm \frac{1}{\sqrt{\mathrm{H}}} \frac{d\mathrm{V}}{dz}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Les éléments $d\sigma$ répondant à ces valeurs des angles $\lambda, \mu, \nu$, sont perpendiculaires à la ligne de force qui les traverse; en effet, les seconds membres des équations (9) expriment aussi les valeurs des cosinus des angles que la tangente à une ligne de force, au point $(x, y, z)$, fait avec les axes coordonnés.

Quant à la seconde solution, elle caractérise évidemment des éléments dont le plan est tangent, au lieu occupé par l'élément, à la ligne de force qui leur correspond.

**4.** Dans les raisonnements précédents et, par suite, dans les équations (9), $\lambda$, $\mu$, $\nu$, représentent les angles que la partie exté-

rieure de la normale à la surface $\sigma$, fait avec les axes coordonnés, aux différents points de cette surface. Il en résulte que les seconds membres des équations (9) doivent être regardés comme affectés du signe —, quand le flux de force a lieu, à travers l'élément $d\sigma$, de l'intérieur de la surface $\sigma$ à l'extérieur; on doit donner à ces seconds membres le signe +, dans le cas contraire.

Eu égard aux équations (5) et aux équations (9) ainsi interprétées, les forces qui sollicitent les éléments $d\sigma$ normaux aux lignes de force, ont pour expressions algébriques de leurs composantes, les valeurs déterminées par les égalités

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \mp \frac{1}{8\pi}\frac{dV}{dx}\sqrt{H}, \\ \eta_1 &= \mp \frac{1}{8\pi}\frac{dV}{dy}\sqrt{H}, \\ \zeta_1 &= \mp \frac{1}{8\pi}\frac{dV}{dz}\sqrt{H}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

L'intensité de ces forces est donnée par l'équation (7).

Considérées au point de vue physique, ces forces expriment des tensions analogues aux tensions des cordes. Cela ressort des équations (10) dont les seconds membres ont constamment le signe exigé par des composantes de forces de tension.

Les composantes des forces qui sollicitent les éléments $d\sigma$ tangents aux lignes de force sont déterminées, de la même manière, par les égalités

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= -\frac{1}{8\pi} H \cos \lambda', \\ \eta_2 &= -\frac{1}{8\pi} H \cos \mu', \\ \zeta_2 &= -\frac{1}{8\pi} H \cos \nu', \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

$\lambda'$, $\mu'$, $\nu'$, désignant les angles que la normale à l'élément fait avec les axes coordonnés.

L'intensité de la force résultante est donnée par l'équation (7)'
Cette intensité de la force résultante est la même, non seulement pour les éléments $d\sigma$ auxquels se rapportent les équations (10) et (11), mais encore pour tous les éléments $d\sigma$ astreints à passer par le même point $(x, y, z)$ que les premiers : la direction relative de cette force par rapport au plan de l'élément varie seule d'un élément à l'autre.

Les forces, dont les composantes sont représentées par les équations (11), doivent être assimilées, au point de vue physique, à des pressions. Cela ressort des équations (11) elles-mêmes.

---

# SUR LA THÉORIE CINÉTIQUE DES PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES

PAR

le P. Joseph DELSAULX
Professeur au Collège de la Compagnie de Jésus
à Louvain.

**1.** M. Duhem a donné, en 1885, une démonstration des lois fondamentales de la capillarité, basée sur la considération de l'état de mouvement que la théorie mécanique de la chaleur suppose dans les corps, soit solides, soit liquides (*).

L'année suivante, M. Paul Janet publia une nouvelle démonstration de ces lois, fondée également sur l'hypothèse de la nature mécanique de la chaleur.

Cette dernière démonstration est une application du théorème du Viriel aux mouvements stationnaires du calorique dans les corps (**).

L'objet de cette note est de faire voir qu'on peut établir les lois fondamentales de la capillarité, dans l'hypothèse cinétique, en s'appuyant uniquement sur le principe de l'équivalence de la force vive et du travail.

Ce nouveau mode de démonstration a l'avantage d'exprimer les constantes capillaires sous la forme analytique que la théorie de Gauss leur donne, tandis que la méthode fondée sur le théorème du Viriel exprime ces constantes sous la forme qu'elles

(*) *Annales scientifiques de l'école normale supérieure*, 3e série, t. II, p. 207.
(**) *Journal de physique théorique et appliquée*, 2e série, t. II, p. 328.

prennent dans la théorie de Laplace, d'après les calculs de Poisson (*).

Au reste, les constantes capillaires des théories de Gauss et de Laplace, bien que différentes par la forme, sont identiques par la valeur numérique. Nous le montrerons à la fin de cette note.

## I

**2.** L'interprétation théorique donnée par Gauss aux phénomènes capillaires fait intervenir dans les raisonnements des intégrales de la forme

$$\iint \varphi(r)\, dv\, dv'. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dans ces intégrales, tantôt $dv$ et $dv'$ représentent des éléments de volume de la masse liquide, tantôt $dv$ désigne seul un élément de volume du liquide, $dv'$ désignant alors un élément de volume des parois du vase dans lequel le liquide est renfermé.

Dans les deux cas, $r$ est la distance séparant les éléments, et $\varphi(r)$, une fonction de cette distance.

La fonction $\varphi(r)$ varie avec la nature moléculaire du liquide, dans le premier cas ; dans le second, elle varie avec la nature moléculaire du liquide et avec celle de la matière du vase.

Dans le premier cas, l'intégrale (1) s'étend au volume de la masse liquide; dans le second, elle s'étend au volume du système de la masse liquide et des parois.

Quand il s'agira de ce dernier cas, nous mettrons l'intégrale (1) sous la forme

$$\iint \varphi(r)\, dv\, du, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$du$ représentant l'élément de volume des parois.

**3.** L'évaluation des intégrales (1) et (2) se fait facilement, lorsque la fonction $\varphi(r)$ s'annule pour toutes les valeurs de $r$ supérieures à une certaine limite, appelée, suivant les circon-

(*) *Nouvelle théorie de l'action capillaire*, p. 14.

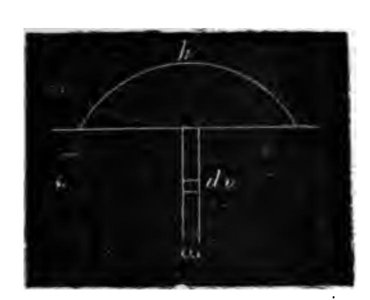
stances, rayon d'activité du liquide agissant sur lui-même, ou rayon d'activité des parois agissant sur le liquide.

En effet, dans le premier cas mentionné au numéro précédent, la partie de l'intégrale (1) qui correspond à chaque élément $dv$ a pour valeur $Cdv$, à l'intérieur de la masse liquide, C désignant une constante Pour le voir, il suffit de décrire, autour de l'élément $dv$ comme centre, une surface sphérique, dont le rayon soit égal au rayon d'activité du liquide agissant sur lui-même.

Dans le voisinage de la surface terminale de la masse liquide, la partie de l'intégrale (1) qui correspond à chacun des éléments $dv$ est égale à

$$C\,dv - \mu\,dv,$$

C désignant la même constante que ci-dessus, et $\mu dv$ exprimant la partie de l'intégrale (1) relative à l'élément $dv$ et aux éléments $dv'$ qui seraient renfermés dans le segment sphérique à une base, $h$, extérieur au liquide, et ayant $dv$ pour centre, dans la supposition que ce segment fut rempli de liquide.




De la sorte, l'intégrale (1) a pour expression la quantité algébrique

$$CV - \int \mu\,dv,$$

dans laquelle V est le volume de la masse liquide, et le terme $\int \mu dv$, une somme s'étendant à toute la couche superficielle du liquide.

Calculons la valeur de cette somme.

**4.** Soient $x$, la distance de l'élément $dv$ à la surface du liquide, et $r$, le rayon d'une surface sphérique située à l'intérieur de la sphère d'activité de cet élément $dv$ et ayant ce dernier pour centre.

On a, pour l'expression de l'aire de la zone, faisant partie de cette surface sphérique, et extérieure au liquide,

$$2\pi r(r - x),$$

et pour la valeur de l'élément de volume compris entre cette zone et la zone semblable infiniment voisine,

$$2\pi r (r - x)\, dr.$$

L'élément factoriel de la quantité $\mu dv$ relatif à ce volume infinitésimal est, par suite, en remplaçant, dans cet élément, $dv$ par l'expression équivalente $\omega dx$,

$$2\pi\omega r(r - x)\, dr\, dx. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

La quantité infiniment petite $\omega$ désigne l'aire de la section transversale du cylindre infiniment mince représenté dans la figure ci-dessus.

En intégrant l'expression différentielle (3) par rapport à la variable $x$ entre les limites 0 et $r$, on détermine la valeur d'une partie de l'intégrale $\int \mu dv$, savoir, la valeur de la somme de tous les termes (3) qui correspondent à une même valeur de $r$.

Cette intégration donne pour résultat

$$\pi\omega r^3 dr.$$

De là, en représentant par S la surface terminale du liquide, et par $\lambda$, le rayon d'activité du liquide agissant sur lui-même, on obtient

$$\int \mu\, dv = \pi S \int_0^\lambda \varphi(r)\, r^3 dr.$$

La valeur numérique de l'intégrale (1) est donc donnée par l'égalité

$$\iint \varphi(r)\, dv\, dv' = CV - \pi S \int_0^\lambda \varphi(r)\, r^3 dr \quad . \; . \; . \quad (4)$$

**5.** Dans l'hypothèse de l'annulation de la fonction $\varphi(r)$, pour toutes les valeurs de $r$ supérieures au rayon d'activité de la matière des parois agissant sur le liquide, on trouve, par les



mêmes raisonnements, que la valeur numérique de l'intégrale (2), étendue au système du liquide et du vase, est donnée par l'équation

$$\iint \varphi(r)\,dv\,du = \pi S' \int_0^{\lambda'} \varphi(r)\, r^3 dr, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

S' étant l'aire de la surface de contact du liquide et du vase, et $\lambda'$, le rayon d'activité des élements de la matière du vase dans leur action sur les éléments du liquide.

**6.** Quand on considère la fonction $\varphi(r)$ comme une dérivée première, la fonction intégrale est donnée, dans son expression la plus générale, par la somme

$$D + \Phi(r),$$

$\Phi(r)$ étant déterminée par l'équation

$$-\Phi(r) = \int_r^{\infty} \varphi(r)\, dr,$$

et D représentant une constante arbitraire.

Or, dans la théorie de la capillarité, il arrive assez souvent que la fonction $\varphi(r)$ soit remplacée, dans les intégrales (1) et (2), par la fonction $D + \Phi(r)$.

Si l'intégration se fait alors entre les mêmes limites que ci-dessus, les équations (4) et (5) deviennent respectivement

$$\iint dv\,dv' \big[D + \Phi(r)\big] = C'V - \pi S \int_0^{\lambda} \Phi(r)\, r^3 dr - \frac{\pi}{4} DS\lambda^4 \quad (6)$$

et

$$\iint dv\,du \big[D + \Phi(r)\big] = \pi S' \int_0^{\lambda'} \Phi(r)\, r^3 dr + \frac{\pi}{4} DS'\lambda'^4, \quad . \quad (7)$$

comme il est facile de le voir (*).

Nous ferons usage de ces formules dans le cours du présent travail.

(*) Nous n'avons pas tenu compte, pour la formation des équations (4), (5), (6), (7), de la remarque formulée dans les *Annales scientifiques de l'école normale supérieure*, 2e série, t. III, pp. 74 et 75, en haut. Cette remarque, en effet, ne nous paraît pas exacte : elle introduit, dans les résultats, un terme proportionnel à la surface terminale du liquide, qui ne peut être admis dans la question physique traitée ci-après.



## II

**7.** Appliquons les principes de la mécanique rationnelle aux mouvements stationnaires de la chaleur, relatifs à une masse liquide renfermée dans un vase quelconque.

Le travail de la pesanteur au sein du système peut être considéré comme nul dans l'état d'équilibre, puisque, durant un intervalle de temps très court et arbitrairement choisi, la valeur moyenne de ce travail est nulle en chaque point du vase et du liquide. Cela résulte de la nature même des mouvements de la chaleur, lesquels sont, comme on sait, dans l'hypothèse cinétique, des mouvements stationnaires. D'autre part, eu égard à l'invariabilité du volume, tant du liquide que du vase, le travail de la pression uniforme supportée par le système est également nul. Il s'ensuit que, à égalité de température dans le système et dans le milieu ambiant, l'état d'équilibre du système est caractérisé par la constance de l'énergie interne.

En désignant la force vive d'un élément du liquide, dans son mouvement stationnaire, par $\frac{1}{2}mw^2$, et celle d'un élément des parois du vase, par $\frac{1}{2}MW^2$; en représentant les forces agissant à la distance $r$ entre les éléments du liquide d'une part, et entre les éléments du liquide et ceux des parois du vase de l'autre, respectivement par $mm'\varphi(r)$ et $mM\psi(r)$; en posant, de plus,

$$\Phi(r) = \int_r^{\infty} \varphi(r)\,dr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

et

$$\Psi(r) = \int_r^{\infty} \psi(r)\,dr, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

on a, en vertu du principe de la conservation de l'énergie (*), l'égalité

$$\sum\frac{1}{2}mw^2 + \sum\frac{1}{2}MW^2 - \sum mm'\left[D + \Phi(r)\right] - \sum mM\left[D' + \Psi(r)\right] = G, \quad (10)$$

D, D' et G exprimant des constantes.

---

(*) BRIOT, *Théorie mécanique de la chaleur*, 2e édition, pp. 16, 17 et 19.

La substitution des intégrations aux sommations simples conduit aux deux égalités

$$\sum mm'[D + \Phi(r)] = \frac{1}{2}\rho^2 \iint dv\, dv'[D + \Phi(r)]$$

et

$$\sum mM\,[D' + \Psi(r)] = \rho\rho' \iint dv\, du\,[D' + \Psi(r)],$$

$\rho$ étant la densité du liquide et $\rho'$ celle de la matière des parois.

D'un autre côté, par les équations (6) et (7), on a

$$\iint dv\, dv'[D + \Phi(r)] = C'V - \pi(u+t)\int_0^\lambda \Phi(r) r^3 dr - \frac{\pi}{4}(u+t)D\lambda^4 \quad (11)$$

et

$$\iint dv\, du\,[D' + \Psi(r)] = \pi t \int_0^{\lambda'} \Psi(r)\, r^3 dr + \frac{\pi}{4} tD'\lambda'^4, \quad . \; . \; . \quad (12)$$

$u$ désignant l'aire de la surface libre du liquide, et $t$, celle de la surface de contact du liquide et du vase.

De là, en convenant des notations

$$a^2 = \frac{\pi}{2}\rho^2\left[D\,\frac{\lambda^4}{4} + \int_0^\lambda \Phi(r)\, r^3 dr\right] \quad . \; . \; . \; . \quad (13)$$

et

$$b^2 = \frac{\pi}{2}\rho\rho'\left[D'\,\frac{\lambda'^4}{4} + \int_0^{\lambda'} \Psi(r)\, r^3 dr\right], \quad . \; . \; . \quad (14)$$

et en transportant, dans la constante G, le terme également constant $\frac{1}{2}\rho^2 C'V$, l'équation (10) devient

$$\sum \frac{1}{2} mw^2 + \sum \frac{1}{2} MW^2 + (a^2 - 2b^2)\, t + a^2 u = G, \quad . \quad (15)$$

**8.** Hormis des termes constants relatifs au liquide et au vase, le premier membre de l'équation (15) exprime la valeur moyenne de l'énergie interne du système du liquide et du vase, dans l'état d'équilibre relatif du système. L'équilibre relatif du système a lieu lorsque la surface terminale de la masse liquide a atteint sa forme permanente, au point de vue sensible.

Pour faire passer le système de cet état d'équilibre relatif à un état d'équilibre relatif infiniment voisin du premier, il suffit de soumettre le liquide à la sollicitation de forces capables de maintenir celui-ci dans la forme terminale relative au deuxième équilibre. En effet ces forces, ajoutant leur action à celle des forces antérieurement agissantes, feront passer nécessairement la masse liquide de la première forme terminale à la seconde.

Eu égard à l'équation $F(t, v, p) = 0$, fort connue en thermodynamique (*), la transformation éprouvée par le système, dans ce passage, est une transformation isothermique(**); car, en vertu de cette équation, la température d'un corps homogène ne change pas lorsque le volume et la pression supportée par ce corps conservent des valeurs constantes. Dans le cas présent, il est vrai, le système du liquide et du vase ne constitue pas un corps homogène, dans la stricte acception du terme; mais ce système est formé de corps respectivement homogènes, et chacun de ces corps, par une propriété des fluides, est soumis, de fait, sur toute l'étendue de sa surface propre, à une pression uniforme, égale à celle qui s'exerce sur la surface libre du liquide, si pas durant le cours, du moins à l'origine et à la fin de la transformation éprouvée par le système, alors que les équilibres relatifs, définis plus haut, sont constitués.

Il résulte de là que, dans l'application du principe de l'équivalence à la transformation éprouvée par le système, il n'y a pas à tenir compte de la variation des forces vives des mouvements stationnaires de la chaleur, dans l'estimation de la variation de l'énergie interne.

D'autre part, les forces appliquées au liquide, à l'effet d'opérer la transformation, sont des forces infiniment petites, au même titre que la partie du volume qu'elles sont censées solliciter.

La conséquence de cette remarque est que le travail des

---

(*) Briot, *Théorie mécanique de la chaleur*, 2e édition, p. 34.

(**) Cet isothermisme est admis sans démonstration par les auteurs qui, à ma connaissance, se sont occupés de la théorie cinétique de la capillarité, dans l'hypothèse de l'incompressibilité des liquides.

forces dont il s'agit constitue un infiniment petit d'ordre infinitésimal supérieur au premier.

En ces circonstances, d'après le principe de l'équivalence, le travail de la pesanteur dont l'expression, pour la masse liquide entière, est

$$-\sum mg\,dz \qquad \text{ou} \qquad -\rho g\int dv\,dz,$$

équivaut numériquement à la variation des deux derniers termes du second membre de l'équation (15).

La fonction $\Omega$, dont la variation égalée à zéro, exprime cette équivalence, est donnée par l'équation

$$\Omega = \rho g\int z\,dv + (a^2 - 2b^2)\,t + a^2 u. \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

On reconnait, dans l'expression de $\Omega$, une fonction analogue, de tout point, à celle dont Gauss fait dépendre, par des variations convenablement choisies, les lois fondamentales de la capillarité (*).

**9.** L'équation de la surface capillaire et l'expression de l'angle de raccordement que l'on tire de l'équation (16), en donnant à la masse liquide les déformations successives employées par Gauss, sont (**)

$$\left.\begin{array}{l} z = \dfrac{a^2}{g\rho}\left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R'}\right) \\ \text{et} \\ \cos i = \dfrac{2b^2 - a^2}{a^2}. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Dans la première de ces égalités, $z$ exprime l'ordonnée verticale d'un point quelconque de la surface capillaire comptée à partir du niveau horizontal du liquide dans le vase; R et R′ sont les rayons de courbure principaux de cette surface au même point.

(*) *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. XIII, pp. 196 et suiv.
(**) Moutier, *Cours de physique*, t. I, pp. 73 et suiv.

Dans la seconde, $i$ désigne l'angle de raccordement de la surface capillaire.

Ces résultats montrent bien que le principe de l'équivalence conduit fort simplement, ainsi que nous l'avons annoncé, aux équations fondamentales de la capillarité.

## III

**10.** La théorie de Laplace (*) assigne aux constantes capillaires entrant dans les équations (17), les valeurs $\alpha^2$ et $\beta^2$ déterminées par les égalités

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{\pi\rho^2}{8}\int_0^\infty r^4\varphi(r)\,dr \\ \text{et}\qquad \beta^2 &= \frac{\pi\rho\rho'}{8}\int_0^\infty r^4\psi(r)dr. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Si cette théorie des phénomènes capillaires, aussi bien que celle que nous venons de montrer pouvoir être fondée, au point de vue cinétique, sur le principe de l'équivalence, sont exactes, il est nécessaire que l'on ait

$$\left.\begin{aligned} D + \frac{4}{\lambda^4}\int_0^\lambda r^3dr\int_r^\infty \varphi(r)\,dr &= \frac{1}{\lambda^4}\int_0^\infty r^4\varphi(r)\,dr \\ \text{et}\qquad D' + \frac{4}{\lambda'^4}\int_0^{\lambda'} r^3dr\int_r^\infty \psi(r)\,dr &= \frac{1}{\lambda'^4}\int_0^\infty r^4\psi(r)dr. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Or il est évident que des valeurs convenables, données aux constantes arbitraires D et D', permettent de satisfaire, sous le rapport numérique, à ces deux équations de condition.

(*) POISSON, *Nouvelle théorie de l'action capillaire*, pp. 14 et 16. — LAPLACE, *Traité de mécanique céleste*, t. IV, pp. 427 et 439. — QUET, *Rapport sur les progrès de la capillarité*, pp. 4 et 5.

Dans la théorie de Gauss — nous allons le faire voir — les constantes capillaires $a'^2$ et $b'^2$, entrant dans les équations (17), sont identiques aux constantes capillaires $a^2$ et $b^2$, définies par les équations (13) et (14), tant au point de vue numérique qu'au point de vue analytique.

En établissant cette proposition, par le raisonnement, il est manifeste que, eu égard aux équations (19), nous aurons établi par là même l'identité numérique des constantes capillaires des théories de Laplace et de Gauss.

Avant d'aborder cette démonstration, nous ferons remarquer au lecteur que l'expression de $\alpha^2$, introduite dans la première des équations de condition (19) conformément aux équations (18), est l'expression donnée par Poisson à cette constante, dans son exposé de la théorie de Laplace. La valeur analytique de $\beta^2$ en dérive par voie d'analogie.

Laplace a donné une autre forme à la constante capillaire $\alpha^2$, dans sa théorie des phénomènes capillaires. Mais Nathaniel Bowditch a fait voir, dans ses commentaires sur la mécanique céleste, que la forme assignée par Laplace à la constante $\alpha^2$ ne diffère pas, dans sa valeur numérique, de la forme assignée par Poisson à la même constante (*).

## IV

**11.** Dans les raisonnements précédents, nous avons supposé que l'action mutuelle des molécules liquides ne s'étendait pas plus loin que la distance $\lambda$, et que celle des parois sur le liquide ne dépassait pas la distance $\lambda'$; il est nécessaire, par conséquent, que nous nous placions au même point de vue dans la détermination analytique des constantes capillaires de la théorie de Gauss.

Nous suivrons, pour cette détermination, la méthode de calcul adoptée par M. Joseph Bertrand (**), et reproduite récemment

(*) *Mécanique céleste by the Marquis de La Place, translated, with a commentary, by Nathaniel Bowditch,* vol. IV, p. 704.

(**) *Journal de mathématiques pures et appliquées,* 1re série, t. XIII, p. 185.

par M. Resal (*). Sous sa forme explicite, notre démonstration a l'avantage de ne laisser planer aucun doute sur la légitimité du résultat.

En posant, avec M. Bertrand et avec M. Resal,

$$\chi(r) = \int_r^\infty \varphi(r)\, dr \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

et

$$\xi(r) = \int_r^\infty \psi(r)\, dr, \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

la somme des moments virtuels des forces sollicitant le système des parois et de la masse liquide considéré ci-dessus, est égale (**) à la variation totale de l'expression

$$U = -g\rho \int z\, dv + \frac{1}{2}\rho^2 \iint \chi(r)\, dv\, dv' + \rho\rho' \iint \xi(r)\, dv\, du. \quad (22)$$

Or, la masse liquide peut être décomposée en deux parties : une couche superficielle d'épaisseur $\lambda$ et la masse interne que la couche superficielle enveloppe entièrement.

Pour chaque élément *dv* de la seconde intégrale de l'équation (22), la masse interne donne, en coordonnées sphériques, le facteur

$$4\pi dv \int_0^\lambda \chi(r)\, r^2\, dr. \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

La couche superficielle donne de même, pour chacun de ses éléments *dv*, l'expression

$$4\pi dv \int_0^\lambda \chi(r)\, r^2 dr - \int d\sigma\, dv \int_{r'}^\lambda \chi(r) r^2 dr, \quad \ldots \quad (24)$$

$d\sigma$ représentant un élément infinitésimal de la surface sphérique de rayon 1, décrite autour de *dv* comme centre, $r'$ désignant la longueur du segment linéaire allant de *dv* à la surface du liquide

(*) *Traité de physique mathématique*, 2e édition, t. I, p. 71.

(**) *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. XIII, p. 188, au bas.

à travers $d\sigma$, et l'intégration relative à la différentielle $d\sigma$ s'étendant à toute la partie de la surface sphérique, dont l'ouverture angulaire est égale à celle de la zone $h$, définie au n° 3.

La somme de l'expression (23) et du premier terme de l'expression (24), étendue à toute la masse liquide, introduit, dans la fonction U, un terme proportionnel au volume V de la masse liquide.

Le second terme de l'expression (24), étendu d'abord, suivant son extension indiquée plus haut, à tous les éléments $dv$ d'un même filet normal à la surface du liquide, puis à toute cette surface, donne un résultat qu'il nous faut évaluer. Ce résultat renferme en facteur la partie la plus importante de la constante capillaire de Gauss relative au liquide.

**12.** Les rayons qui délimitent $d\sigma$, prolongés jusqu'à la surface du liquide, découpent sur cette surface un élément $d$S. Entre les éléments $d\sigma$ et $d$S, on a la relation

$$r'^2 d\sigma = dS \,.\, \cos \varepsilon,$$

$\varepsilon$ représentant l'angle formé par les deux éléments.

En posant

$$X(r) = \int_r^\infty \chi(r)\, r^2 dr, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

le second terme de l'expression (24) prend la forme

$$-\int dS \,.\, \cos \varepsilon \,.\, dv \,\frac{X(r') - X(\lambda)}{r'^2}. \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

L'intégrale de l'expression différentielle (26) peut s'étendre, dans une première intégration, à tous les éléments $dv$, correspondant à un même élément $d$S, et faisant partie d'un filet conique d'ouverture infinitésimale dont la direction est caractérisée par une valeur spéciale de l'angle $\varepsilon$. Par là, on obtient, en coordonnées sphériques, comme expression de la quantité (26) ainsi intégrée,

$$-dS \,.\, \cos \varepsilon \,.\, d\sigma' \int_0^\lambda dr' \big[X(r') - X(\lambda)\big] \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Dans l'expression (27), $d\sigma'$ désigne un élément infinitésimal de la surface sphérique de rayon 1, décrite de $d$S comme centre, normal à l'axe du filet conique.

La différentielle (27) étendue, dans une seconde intégration, à toutes les directions caractérisées par les diverses valeurs de l'angle $\varepsilon$, depuis 0 jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, donne pour résultat

$$-\pi dS \int_0^\lambda dr' \left[X(r') - X(\lambda)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

puisque la somme de toutes les valeurs du produit cos $\varepsilon$. $d\sigma'$ est égale à la projection de la moitié de la surface sphérique de rayon 1, ayant $d$S pour centre, sur le plan tangent à la surface liquide en $d$S.

Il resterait à étendre la différentielle (28) à toute la surface S de la masse liquide. Mais cette extension n'est nullement nécessaire: l'expression (28) montre suffisamment, conjointement avec l'équation (22) et l'expression (24) rapprochées de l'équation (16), que la constante capillaire, relative au liquide, est égale, dans la théorie de Gauss (*), à

$$\frac{\pi\rho^2}{2}\int_0^\lambda dr' \left[X(r') - X(\lambda)\right].$$

En représentant cette constante par $a'^2$, et en introduisant la considération explicite de la fonction $\chi(r)$ dans son expression, par le moyen de l'équation (25), on a donc

$$a'^2 = \frac{\pi\rho^2}{2}\int_0^\lambda dr' \int_{r'}^\lambda \chi(r)\, r^2 dr.$$

**13.** Dans la fonction U définie par l'équation (22), l'expression la plus générale de la fonction $\chi(r)$ n'est pas celle que l'équation (20) spécifie, mais bien cette expression augmentée d'une constante arbitraire.

---

(*) *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. XIII, p. 195, au bas. Nous donnons ici, à la constante capillaire, la définition indiquée ci-dessus aux nos 7 et 9.

Or, du moment que cette constante arbitraire entre de fait, ainsi qu'on va le voir, dans la formation analytique de la constante capillaire $a'^2$, elle peut être déterminée à l'aide des évaluations expérimentales, et il n'est pas permis de la négliger dans la comparaison des valeurs numériques que $a'^2$ reçoit des différentes théories.

Il ressort de ces considérations que la constante capillaire $a'^2$ est déterminée par l'équation

$$a'^2 = \frac{\pi\rho^2}{2}\int_0^\lambda dr' \int_{r'}^\lambda r^2 dr \left[\int_r^\infty \varphi(r)\,dr + \mathfrak{C}\right],$$

$\mathfrak{C}$ étant la constante arbitraire dont il vient d'être question.

Par suite, on a

$$a'^2 = \frac{\pi\rho^2}{2}\int_0^\lambda dr' \int_{r'}^\lambda r^2 dr \int_r^\infty \varphi(r)\,dr + \mathfrak{C}\,\frac{\pi\rho^2}{2}\int_0^\lambda dr' \int_{r'}^\lambda r^2 dr. \quad (29)$$

Le premier terme du second membre de l'équation (29) peut, au moyen de l'intégration par parties, se mettre sous la forme

$$\frac{\pi\rho^2}{2}\left[r'\int_{r'}^\lambda r^2 dr \int_r^\infty \varphi(r)\,dr\right]_0^\lambda + \frac{\pi\rho^2}{2}\int_0^\lambda r'^3 dr' \int_{r'}^\infty \varphi(r)\,dr,$$

expression qui se réduit manifestement à

$$\frac{\pi\rho^2}{2}\int_0^\lambda r'^3 dr' \int_{r'}^\infty \varphi(r)\,dr.$$

Le second terme du même membre est égal à

$$\mathfrak{C}\,\frac{\pi\rho^2}{2}\,\frac{\lambda^4}{4}.$$

On a donc

$$a'^2 = \frac{\pi\rho^2}{2}\left[\mathfrak{C}\,\frac{\lambda^4}{4} + \int_0^\lambda r'^3 dr' \int_{r'}^\infty \varphi(r)\,dr\right] \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

**14.** L'identité des expressions analytiques des constantes capillaires $a^2$ et $a'^2$, déterminées par les équations (13) et (30), est établie, par les raisonnements précédents, aussi parfaitement qu'il est possible de le désirer.

On démontrerait de la même manière l'identité des expressions analytiques de $b^2$, déterminée par les équations (9) et (14), et de la constante capillaire $b'^2$, relative à l'action des parois sur le liquide, dans la théorie de Gauss.

En toute rigueur, je l'avoue volontiers, cette double démonstration n'était nullement nécessaire : l'identité analytique des constantes $a'^2$ et $a^2$, $b'^2$ et $b^2$, aurait pu être établie *a priori*, et sans calcul. Mais nous avons voulu, par les développements précédents, faire disparaître de l'esprit du lecteur tout doute au sujet de cette identité de forme, afin que l'identité numérique des constantes capillaires des théories de Gauss et de Laplace fut, par cela même, établie d'une façon péremptoire.

Bien qu'il soit fort naturel de rattacher la théorie cinétique de la capillarité au principe de l'équivalence, dont le théorème des vitesses virtuelles, employé par Gauss, est une expression plus ou moins abstraite, nous ne pensons pas que le rapprochement ait été fait jusqu'ici d'une manière formelle.

Tout l'intérêt de cette note, si intérêt il y a, consiste dans ce rapprochement et dans la démonstration de l'identité numérique des constantes capillaires des théories de Gauss et de Laplace.

# NOTE

SUR

# LE GYROSCOPE COLLIMATEUR

DE

## M. le capitaine de vaisseau FLEURIAIS

PAR

**A. BAULE**

Lieutenant de vaisseau en retraite,
Commandant le paquebot *Niger* des messageries maritimes.

---

Cet instrument, qui permet au navigateur de déterminer ou de rectifier sa position à la mer, alors même que la ligne d'horizon lui est cachée par la brume et par l'obscurité de la nuit, est dû aux patientes et habiles recherches de M. le capitaine de vaisseau Fleuriais, bien dignes du prix extraordinaire décerné par l'Académie des sciences au mois de décembre dernier. La haute compétence des membres de la Commission académique chargée d'examiner le collimateur, et les résultats obtenus tant à bord du *La Galissonnière,* commandé par l'auteur, que sur d'autres bâtiments de l'escadre, ne laissent aucun doute sur sa valeur pratique à laquelle les observations inscrites dans le tableau suivant ne font que rendre hommage.

Ces observations ont été recueillies à bord du *Niger*, soit par mes officiers, soit par moi-même. Les quelques divergences notables qui s'y rencontrent (6′ à 7′) doivent être attribuées en partie à notre inexpérience de l'instrument qui exige, comme tout autre, une certaine habitude.

*Dépression de l'horizon de la mer :*

| Donnée par le gyroscope. | Dépression apparente exacte. | Erreurs. |
|---|---|---|
| — 5'20" | — 5'00" | — 0'20" |
| — 9'00" | id. | — 4'00" |
| — 9'10" | id. | — 4'10" |
| — 7'50" | id. | — 2'50" |
| — 9'40" | id. | — 4'40" |
| — 6'10" | id. | — 1'10" |
| — 4'50" | id. | + 0'10" |
| — 1'30" | id. | + 3'30" |
| — 4'40" | id. | + 0'20" |
| + 0'30" | id. | + 5'30" |
| — 5'40" | id. | — 0'40" |
| — 4'30" | id. | + 0'30" |
| — 4'00" | id. | + 1'00" |
| — 1'00" | id. | + 4'00" |
| — 3'30" | id. | + 1'30" |
| — 2'00" | id. | + 3'00" |

*Hauteurs méridiennes du soleil :*

| Observées au gyroscope. | Hauteurs exactes. | Erreurs. |
|---|---|---|
| 57°02'50" | 57°03'20" | — 0'30" |
| 56°37'20" | 56°36'10" | + 1'10" |
| 58°27'00" | 58°29'00" | — 2'00" |
| 63°17'10" | 63°19'50" | — 2'40" |
| 68°52'10" | 68°54'10" | — 2'00" |
| 73°35'00" | 73°37'40" | — 2'40" |
| 81°22'40" | 81°21'00" | + 1'40" |
| 75°07'00" | 75°01'00" | + 6'00" (forts roulis). |
| 70°11'10" | 70°05'00" | + 6'00" (forts roulis). |

*Hauteurs du soleil hors du méridien :*

| Observées au gyroscope. | Hauteurs exactes. | Erreurs. |
|---|---|---|
| 64°08'50" | 64°13'20" | — 4'30" |
| 37°02'30" | 37°00'00" | + 2'30" |
| 26°17'40" | 26°19'40" | — 2'00" |
| 30°19'20" | 30°17'10" | + 2'10" |
| 45°22'30" | 45°23'20" | — 0'50" |
| 26°02'00" | 26°03'00" | — 1'00" |
| 36°50'30" | 36°49'50" | + 0'40" |
| 37°43'50" | 37°41'30" | + 2'20" |
| 34°10'30" | 34°15'40" | — 5'10" |
| 23°54'50" | 23°50'50" | + 4'00" |
| 22°53'40" | 22°55'20" | — 1'40" |



*Hauteurs d'étoiles ou de lune :*

| Observées au gyroscope. | Hauteurs exactes. | Erreurs. |
|---|---|---|
| 17°50'10" | 17°50'20" | — 0'10" |
| 64°07'30" | 64°13'30" | — 6'00" |
| 54°33'30" | 54°36'20" | — 2'50" |
| 43°46'10" | 43°38'50" | + 7'20" |
| 54°38'10" | 54°36'20" | + 1'50" |
| 14°08'40" | 14°10'30" | — 1'50" |

Par contre, la plupart des hauteurs données par le gyroscope sont tout aussi exactes que celles qu'on aurait obtenues par l'emploi ordinaire du sextant, bien qu'elles aient été prises de la passerelle élevée de 8 mètres au-dessus de la flottaison, où les mouvements du roulis sont très accentués. Du reste, ne pourrait-on compter que sur l'approximation indiquée par les plus fortes divergence (7' environ), l'instrument rendrait encore de très grands services dans bien des cas.

En voici la description sommaire. Je renvoie pour plus de détails à la brochure de l'auteur (*) et au savant rapport de l'amiral de Jonquières (**) où se trouve exposé l'historique du problème longtemps cherché de la détermination de la verticale à bord (***).

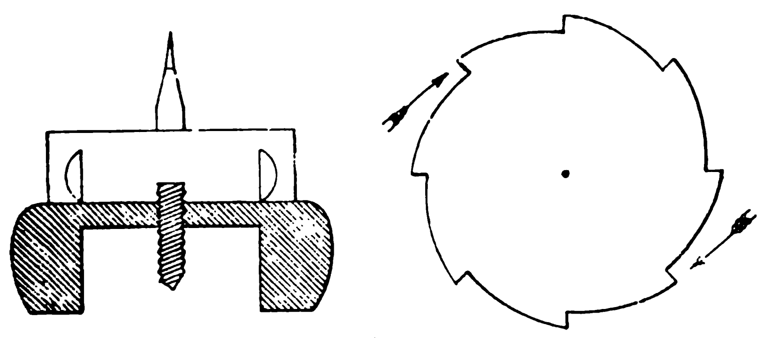


Fig. 1.

La pièce essentielle est une sorte de tore en cuivre (fig. 1) d'un diamètre de 47 millimètres et d'un poids de 174gr,9, limité

(*) *Gyroscope collimateur.* Librairie Baudoin. Paris.

(**) *Comptes rendus de l'Académie des sciences.* Décembre, 1886.

(***) Voir les figures I et II empruntées au mémoire de M. Fleuriais.



à sa partie supérieure par une surface plane et circulaire. Cette petite masse qui constitue le corps du gyroscope ou toupie est traversée suivant son axe de figure par une petite vis à pas très court ($0^{mm},44$), terminée par une pointe d'acier servant de pivot. Ce pivot repose sur un petit godet de forme sphérique parfaitement poli et huilé, creusé à l'extrémité d'une tige d'acier fixée elle-même au fond d'une boite cylindrique dans laquelle le gyroscope peut se mouvoir librement à l'abri des courants d'air extérieurs. On peut régler la vis de façon à donner au centre de gravité du système la position convenable. Ce centre doit être toujours en dessous du pivot, de sorte que si la boite cylindrique est verticale et la toupie au repos, l'axe de celle-ci coïncide avec celui de la boîte.

Le fond de la boite porte un tuyau bifurqué dont les branches viennent, en remontant, aboutir obliquement et aux extrémités d'un même diamètre vers le milieu du tore, dont le pourtour est garni de sortes d'adents ou augets (fig. 1). Lorsque la boite posée sur un support spécial est mise en communication avec un petit soufflet, celui-ci lance dans le tuyau bifurqué un courant d'air assez vif qui vient frapper l'intérieur des augets de façon à constituer un couple dont l'axe coïncide avec celui de la boîte. On obtient ainsi, au bout de 30 à 40 secondes, un mouvement de rotation rapide accusé par un son musical. On dégage alors la boîte cylindrique de son support et on l'adapte au sextant derrière le petit miroir.

La face supérieure du gyroscope porte deux lentilles plan-convexes, perpendiculaires à cette face et situées sur un même diamètre. Sur leur partie plane qui est tournée vers le centre est gravé un trait fin et noirci. Nous supposerons tout d'abord les deux traits rigoureusement à la hauteur du centre optique de leur lentille respective et contenus tous deux dans un même plan perpendiculaire à l'axe du gyroscope. Chaque trait est rigoureusement au foyer de l'autre lentille, de sorte que les rayons lumineux qui en émanent sortent de cette lentille suivant un faisceau parallèle au plan du gyroscope. Par conséquent, si ces rayons émergents sont recueillis par une lunette mise au



point sur l'infini, l'image du trait sera nettement perçue. Si, de plus, l'appareil est en rotation rapide, les images des deux traits se superposeront, et, par l'effet de la persistance des impressions de la rétine, l'observateur verra distinctement une ligne droite continue qui sera la trace, sur le plan focal de la lunette, d'un plan perpendiculaire à l'axe du gyroscope et passant par le centre optique de l'objectif. Cette droite qui, en réalité, représente un plan, constitue le repère artificiel destiné à remplacer l'horizon de la mer.

Les lentilles sont protégées par un chapeau mobile dans lequel sont pratiquées deux fenêtres permettant le passage des rayons lumineux; la boite cylindrique est ouverte dans le même but du côté de la lunette. Au milieu du chapeau est fixée une tige mince, prolongeant vers le haut l'axe du gyroscope, à l'aide de laquelle les mouvements de la toupie peuvent être surveillés de l'extérieur à travers le couvercle en verre de la boite. Une autre fenêtre fermée par un verre dépoli et pratiquée dans la paroi de la boîte du côté opposé à la lunette sert à l'éclairage du repère.

Le dispositif qui maintient la boite cylindrique liée au sextant est placé de telle sorte que lorsque l'axe de la toupie se confond avec celui de la boite, le repère passe à peu près par l'axe optique de la lunette et coïncide avec un fil réticulaire perpendiculaire au plan du limbe. Dans cette position, l'axe de la toupie est parallèle à ce plan et en est un peu plus éloigné que la limite de la partie non étamée du petit miroir. Ainsi, l'observateur peut voir à la fois l'image directe du repère et l'image doublement réfléchie d'un astre quelconque.

Si le gyroscope tourne rapidement sans que son axe s'écarte de plus de deux ou trois degrés de la verticale, le repère ne sort pas du champ de la lunette, si l'axe de celle-ci est maintenu horizontal. L'axe du gyroscope décrit alors d'un mouvement continu un cône à peu près droit autour de la verticale; c'est la régularité de ce mouvement qui constitue le principe de l'instrument. L'observateur, tenant son sextant immobile et vertical, verra le repère se déplacer dans le champ de la lunette et

prendre d'un mouvement continu diverses inclinaisons. D'abord horizontal dans la partie supérieure du champ, il descendra en s'inclinant vers la gauche, puis il se rapprochera de l'horizontale qu'il atteindra vers la partie inférieure du champ. Il s'inclinera ensuite de l'autre côté, en remontant, pour repasser à peu près par sa position primitive, et ainsi de suite, suivant les phases du mouvement de précession. Si, au lieu de conserver le sextant immobile, l'observateur l'incline de telle sorte que le repère coïncide constamment avec le fil du réticule, et si, visant à peu près dans le vertical d'un astre, il maintient en même temps, par un mouvement assez rapide de la vis de rappel, l'image doublement réfléchie de cet astre en contact avec le repère, le zéro du vernier marquera à chaque instant l'inclinaison, sur le *plan repère*, de la droite qui va du grand miroir à l'astre (*). Cet angle sera maximum ou minimum lorsque l'axe du gyroscope, et par suite le plan du sextant, sera parallèle au plan azimutal de l'astre : maximum lorsque la tige supérieure de la toupie sera inclinée vers l'astre, minimum dans la position inverse. Or, ces positions extrêmes ne peuvent échapper à l'observateur occupé à maintenir le contact, car, à chacune d'elles, il lui faudra inverser le mouvement de la vis de rappel. Il peut donc en faire noter les heures et les lectures correspondantes, $l_1$ et $l_2$, sur le limbe du sextant. Si l'astre étant immobile la toupie conservait toujours la même inclinaison, la hauteur serait évidemment $\frac{l_1+l_2}{2}$. Or, la toupie se redresse, lentement, il est vrai, mais d'une manière sensible; il faudra prendre un troisième top au maximum ou minimum suivant. La hauteur est alors assez approximativement représentée par

$$\frac{l_1 + 2l_2 + l_3}{4},$$

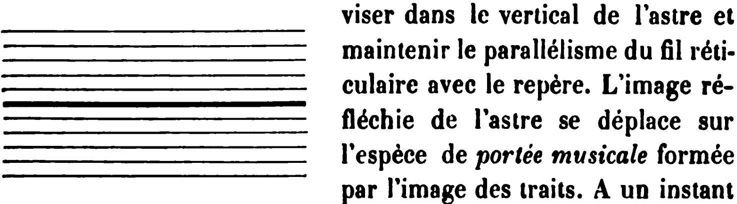
($l_3$ étant la lecture du 3e top), moyenne bien connue des astronomes.

(*) Le mouvement qui est imprimé au sextant est une rotation alternative autour de la droite qui va du grand miroir à l'astre.



Afin d'éviter les lectures directes sur le limbe qui seraient fort incommodes, la vis de rappel, disposée en vis micrométrique, porte des graduations visibles à distance. Il suffit de noter, avant l'observation et après avoir serré la vis de pression, à quelle graduation du limbe correspond une graduation arbitrairement choisie de la vis micrométrique. Un tour de vis représentant un arc de 29′ du limbe, il est facile de ramener une lecture de la vis à la graduation du limbe. Mais, mieux encore, un récent et très ingénieux perfectionnement permet à l'observateur d'effectuer lui-même chaque lecture *tout en conservant l'œil à la lunette*. Sur l'une des lentilles, $L_1$, sont gravés, au lieu d'un trait unique, onze traits parallèles et espacés de telle sorte que chaque intervalle corresponde à un angle de dix minutes du limbe (par conséquent l'angle ayant son sommet au centre optique $C_2$ de la lentille à trait unique et dont les côtés viennent aboutir à deux traits consécutifs est égal à 10′).

Quand la position des lentilles est bien réglée, l'image du trait unique de l'autre lentille, $L_2$, se superpose, pendant la rotation, au trait central de la lentille $L_1$. La superposition de ces deux traits constitue le repère dont il vient d'être parlé; il est plus gros que les autres traits avec lesquels il ne peut être confondu et le procédé précédemment décrit reste à la disposition de l'observateur. Mais il peut aussi opérer comme il suit : fixer le zéro du vernier à peu près à la graduation du limbe qui représente la hauteur de l'astre, puis, sans toucher à la vis de rappel,



viser dans le vertical de l'astre et maintenir le parallélisme du fil réticulaire avec le repère. L'image réfléchie de l'astre se déplace sur l'espèce de *portée musicale* formée par l'image des traits. A un instant quelconque l'inclinaison de l'astre sur le *plan repère* est égal à l'angle (lu d'avance) indiqué sur le limbe par le zéro du vernier augmenté ou diminué du nombre de minutes indiqué, sur la *portée*, par la distance de l'image de l'astre au trait central, suivant que cette image est en dessous ou en dessus de ce trait



(la lunette renverse). On peut obtenir la hauteur, comme tout à l'heure, en appliquant la moyenne par trois aux élongations extrêmes. L'exactitude de cette méthode dépend de la précision avec laquelle l'observateur saura apprécier la position de l'astre entre deux traits consécutifs; elle est donc théoriquement moins rigoureuse que la première. Par contre, elle permet à l'observateur de maintenir le sextant des deux mains, ce qui évite des mouvements nuisibles et épargne la fatigue.

J'ai supposé, pour simplifier les explications, que les centres optiques des lentilles étaient contenus dans le plan déterminé par les deux traits dont la superposition constitue le repère. Or, il est à peu près impossible, en pratique, de réaliser rigoureusement cette condition. Il en résulte une erreur instrumentale constante facile à expliquer. Soient $C_1$ et $C_2$ les centres optiques des lentilles, $T_1$ et $T_2$ les traces des traits qui forment le repère et AA′ une droite parallèle à l'axe du gyroscope (fig. 2).

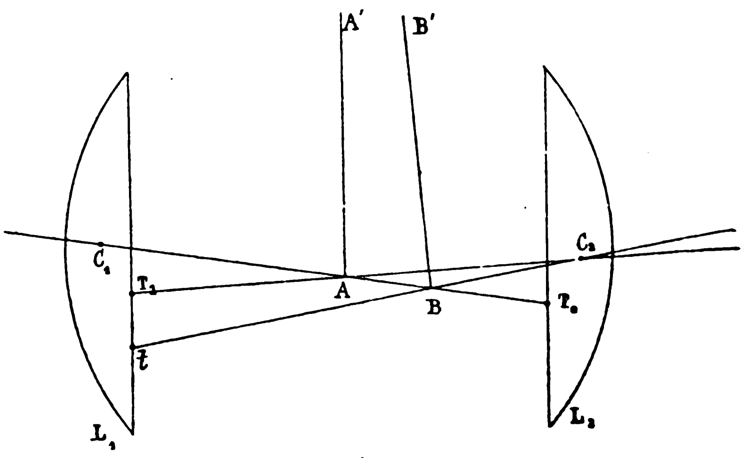



Fig. 2.

Il est clair que si le système tourne rapidement autour d'un axe parallèle à AA′, il faut, pour que les images des traits se superposent, que chaque trait soit perpendiculaire à AA′ et, ensuite, que les droites, ou plus exactement les plans, $T_2C_1$ et $T_1C_2$, déterminés respectivement par le trait de l'une des len-

tilles et le centre optique de l'autre, soient également inclinés sur la droite AA′ (*). Par conséquent, les procédés précédemment décrits donneront l'inclinaison de l'astre, non pas sur un plan perpendiculaire à l'axe, mais sur le plan $T_1C_2$ ou $T_2C_1$, d'où une erreur instrumentale égale à la moitié de l'angle $C_1AT_1$ ou $C_2AT_2$. Cette collimation, une fois déterminée, doit rester invariable tant que les lentilles conservent la même position relative. Un égal déplacement dans le sens AA′ n'a aucune influence, mais si les lentilles, dont les faces planes sont, dans la position normale, à peu près parallèles à cette droite, viennent à s'incliner, leurs inclinaisons peuvent être telles que les lignes $C_1T_2$ et $C_2T_1$ fassent encore le même angle avec AA′ et que, par suite, la superposition des traits subsiste encore. Cependant, l'angle $C_1AT_1$ ou $C_2AT_2$ et, par suite, la collimation, ont varié sans que rien dans l'apparence des traits puisse accuser ce changement. Je suis porté à croire que cet effet se produit quelquefois. La force centrifuge, aux très grandes vitesses (100 tours par seconde), sollicite les lentilles à raison de 300 grammes par gramme; il n'est pas étonnant que les montures un peu faibles fléchissent sous cet effort relativement considérable. Il sera facile d'y remédier.

Avant d'aborder l'étude théorique de l'instrument, il faut connaître sa masse, ses moments d'inertie et la distance de son centre de gravité au point de suspension. Les unités adoptées sont le centimètre, le gramme et la seconde; par suite l'accélération de la pesanteur est :

$$g = 980.$$

Soient :

*m* la masse du gyroscope. Son poids étant $174^{gr},9$, cette masse est 0,178.

A, son moment d'inertie autour de l'axe de figure.

(*) Si *t* est la trace d'un trait secondaire, le dernier par exemple, l'angle $T_1C_2t$ est égal à 50′. Si par une cause quelconque l'image du trait unique $T_2$ venait à se superposer à celle du trait secondaire *t*, la toupie tournerait autour d'une droite parallèle à la bissectrice BB′ de l'angle $C_1BC_2$ (B, point de rencontre des droites $C_2t$ et $C_1T_2$).

$B_1$, son moment d'inertie autour d'un axe perpendiculaire au précédent et passant par le centre de gravité. Le gyroscope serait un solide de révolution sans la présence des lentilles; on peut admettre que l'irrégularité produite par celles-ci soit en partie compensée par les fenêtres pratiquées en face d'elles dans le chapeau. Du reste, des masses compensatrices fixées au chapeau sur le diamètre perpendiculaire à celui des lentilles rétablissent l'égalité des moments d'inertie $B_1$.

$r$, la distance du centre de gravité à la pointe du pivot.

B, le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle au précédent et passant par l'extrémité du pivot. On a :

$$B = B_1 + mr^2.$$

$n$, la vitesse de rotation par seconde autour de l'axe de figure. Si N est le nombre de tours par seconde, on a $n = 2\pi N$ (l'axe de la toupie étant immobile ou supposé immobile).

Pour avoir $B_1$, j'ai mesuré les durées $T_1$, $T_2$, $T_3$, ... d'oscillation de la toupie posée sur son pivot, mais dépourvue de rotation, après avoir donné à $r$ les valeurs $r_0$, $r_0 + h$, $r_0 + 2h$, ..., $h$ étant la longueur (0,044) du pas de vis de la tige du pivot. Les équations

$$T_0 = \pi\sqrt{\frac{r_0 + \frac{B_1}{mr_0}}{g}}, \quad T_1 = \pi\sqrt{\frac{r_0 + h + \frac{B_1}{m(r_0 + h)}}{g}}, \quad T_2 = \cdots \text{etc.}$$

permettent de calculer $B_1$ et $r_0$. Par plusieurs séries d'observations j'obtiens (*) :

$$B_1 = 0{,}38.$$

J'ai essayé, pour avoir A, de faire osciller, dans le sens de son axe, la toupie suspendue à deux fils, comme un pendule ordinaire. La difficulté de mesurer exactement la distance du point

(*) Il aurait fallu en toute rigueur tenir compte du déplacement produit sur le centre de gravité par le mouvement de la vis, mais comme celle-ci ne pèse que quelques décigrammes et que du reste elle n'a marché que de 1mm,5 environ, cette influence était négligeable.

d'attache des fils à l'axe m'a empêché d'obtenir des résultats concordants. L'idée de la balance bifilaire m'a fourni un procédé plus exact. J'ai posé successivement la toupie et un disque en cuivre de même poids, dont il était facile de calculer le moment d'inertie, sur un très léger support circulaire muni de deux petites anses par lesquelles il était suspendu à deux longs fils parallèles. Le centre de la toupie ou celui du disque étant placé le plus exactement possible au-dessus du centre du support, l'appareil a été légèrement écarté, dans le sens horizontal, de sa position d'équilibre en agissant *comme pour tordre les fils ensemble*. Il en est résulté des oscillations *horizontales* parfaitement isochrones, dont la durée a été exactement mesurée dans les deux cas. La persistance de ces oscillations prouvait que la résistance de l'air n'avait sur elles que très peu d'effet et, de plus, les fils étant très longs relativement à leur écartement, le mouvement en hauteur était à peu près nul. Dans ces conditions, les moments d'inertie de la toupie et du disque sont entre eux comme les carrés des durées de leurs oscillations respectives. En tenant compte du moment d'inertie du support, j'ai trouvé ainsi :

$$A = 0,49.$$

La longueur de $r$ qu'il convient d'adopter est à peu près 0,08, qui correspond à une durée d'oscillation de la toupie posée sur son pivot de 0",5. La durée du premier tour de précession, au début de l'observation, est alors de 2 minutes. Une durée plus longue, qui pourrait être favorable (théoriquement) à la stabilité de l'axe, augmenterait la fatigue de l'observateur. Elle ne pourrait être obtenue qu'en diminuant la longueur de $r$, ce qui produit, dans le redressement, des irrégularités dont je parlerai plus tard en traitant la question théorique.

La vitesse de rotation $n$, qui est à peu près 500 au début (elle peut même atteindre 600 quand la toupie est fortement lancée, ce qui représente à peu près 100 tours par seconde), tombe à 300 au bout de 4 minutes. En prenant en moyenne $n = 400$, on a :

$$\frac{mgr}{A\bar{n}} = 0,067, \quad \frac{B}{A\bar{n}} = 0,002.$$

J'ai trouvé par de nombreuses observations que le rapport de la dérivée $\dot{n}$, de $n$ par rapport au temps, à $n$ est sensiblement constant. On aurait :

$$\frac{\dot{n}}{n} = -0{,}003.$$

Ce rapport étant le même quand on opère avec une pointe aiguë ou avec une pointe mousse, on peut admettre que le frottement du pivot n'a que peu d'influence sur la diminution de $n$ qui doit être attribuée presque exclusivement au frottement de l'air.

Les considérations théoriques, qu'un très prochain départ ne me laisse pas le temps d'exposer, me conduisent à représenter le *mouvement moyen* de l'axe par les équations

$$\bar{\dot{\psi}} = \frac{mgr}{\mathrm{A}n} \text{ (1)}, \quad \frac{\bar{\dot{\theta}}}{\sin \bar{\theta}} = -c\,\bar{\dot{\psi}} \text{ (2)},$$

en désignant par $\theta$ et $\dot{\theta}$ l'inclinaison de l'axe sur la verticale et sa dérivée par rapport au temps; par $\psi$, l'angle de précession compté à partir d'un plan vertical de direction fixe; par $\dot{\psi}$ la dérivée de cet angle par rapport au temps, et par C, une constante. Le trait qui surmonte les symboles indique qu'il s'agit du mouvement moyen, c'est-à-dire du mouvement du *vecteur*, autour duquel l'axe du gyroscope exécute de petites oscillations dont la durée est

$$\frac{2\pi \mathrm{B}_1}{\mathrm{A}n} = \text{(à peu près) } 0{,}01^{\text{sec}}.$$

Ce mouvement oscillatoire ou vibratoire très rapide est presque imperceptible à l'œil lorsque le pivot et le godet sont en bon état. S'il était sensible, l'image du repère paraîtrait tremblottante et trouble. C'est, au contraire, une ligne noire parfaitement nette tant que la vitesse de rotation $n$ est suffisamment grande.

L'équation (2) représente une *loxodromie*. Si l'on suppose une sphère tracée autour de la pointe comme centre et accompagnant

le pivot dans son mouvement, l'axe du gyroscope dessine sur cette sphère une loxodromie dont le pôle est le point de rencontre de la sphère et de la verticale menée par la pointe du pivot.

Examinons les conséquences de l'équation (2); elle donne par l'intégration

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}\, e^{-\epsilon(\psi-\psi_0)},$$

$\theta_0$ et $\psi_0$ définissant la direction initiale de l'axe. Les angles $\theta$ étant très petits, on peut prendre les arcs pour les tangentes et écrire :

$$\theta = \theta_0\, e^{-\epsilon(\psi-\psi_0)}.$$

Si les inclinaisons $\theta$ et $\theta_0$ correspondent respectivement à un maximum et à un minimum consécutifs, on a, à très peu près, $\psi - \psi_0 = \pi$. Soient $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ ... les inclinaisons correspondant à une série de maxima et minima pour lesquels on a observé, sur le limbe ou sur la vis micrométrique, les lectures $l_1$, $l_2$, $l_3$, ..., on a :

$$\theta_2 = \theta_1 e^{-\epsilon\pi}, \quad \theta_3 = \theta_1 e^{-2\epsilon\pi}, \quad \theta_4 = \cdots \text{etc.}$$

$$\theta_1 + \theta_2 = \theta_1(1 + e^{-\epsilon\pi}),\ \theta_2 + \theta_3 = \theta_1 e^{-\epsilon\pi}(1 + e^{-\epsilon\pi})$$

$$\frac{\theta_1 + \theta_2}{(\theta_1 + \theta_2) + (\theta_2 + \theta_3)} = \frac{1}{1 + e^{-\epsilon\pi}} = \text{K}.$$

Or,

$$\begin{array}{llll} l_1 - \text{collimation} & = & \text{hauteur de l'objet} & + \theta_1 \\ l_2 - \quad \text{id.} & = & \text{id.} & - \theta_2 \\ l_3 - \quad \text{id.} & = & \text{id.} & + \theta_3 \\ l_4 \ldots\ldots\ldots & & & , \end{array}$$

en supposant que la série commence par un maximum. Donc

$$l_1 - l_2 = \theta_1 + \theta_2, \quad l_3 - l_2 = \theta_2 + \theta_3,$$

$$\frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 + \theta_2 + \theta_2 + \theta_3} = \frac{l_1 - l_2}{(l_1 - l_2) + (l_3 - l_2)} = \frac{1}{1 + e^{-\epsilon\pi}} = \text{K}. \quad (3)$$

Par conséquent, le rapport (3) doit être constant dans une même série, c'est ce que de nombreuses expériences vérifient.

En voici une représentée dans le tableau ci-après : la première colonne indique les heures des maxima et minima; la seconde, les lectures correspondantes sur la vis micrométrique; la troisième, la différence de ces lectures; la quatrième, le rapport **K** calculé par la formule (3); la cinquième, les moyennes par trois, $\frac{l_1 + 2l_2 + l_3}{4}$. Chaque nombre représente, sur la graduation de la vis micrométrique, la hauteur de l'objet observé (qui est ici l'horizon de la mer) augmentée de la collimation. Autrement dit, pour avoir la hauteur augmentée de la collimation, il suffit de lire sur le limbe l'angle qui correspond à la graduation de la vis micrométrique, indiqué dans la colonne V. La méthode de la moyenne par trois n'est qu'approximative, mais elle est indépendante de la loi du redressement. On peut lui substituer avantageusement un autre procédé basé sur la constance de K (dans la même série). On a, d'après les équations ci-dessus,

$$
\begin{aligned}
\text{hauteur} + \text{collim.} = l_1 - \Theta_1 = l_1 - \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{1 + e^{\varepsilon\pi}} &= l_1 - \mathrm{K}(l_1 - l_2) \\
&= l_2 + \mathrm{K}(l_3 - l_2) \\
&= l_3 - \mathrm{K}(l_3 - l_4) \\
&\text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{aligned}
$$

Les nombres inscrits dans la colonne VI sont les résultats de ces formules.

La colonne VII indique approximativement la valeur moyenne de $n$ calculée d'après la formule

$$2\pi = \frac{mgr}{\mathrm{A}\bar{n}} \cdot (t_3 - t_1),$$

$t_1$ et $t_3$ représentant les époques de deux maxima ou de deux minima consécutifs.

La valeur de $n$ ainsi obtenue (*) correspond à peu près à l'heure intermédiaire $t_2$. La colonne VIII donne le rapport $\frac{\dot{n}}{n}$.

(*) Cette valeur est d'accord avec celle que M. Fleuriais a trouvée directement à l'aide d'un diapason. Voir *Comptes rendus de l'Académie des sciences.* Avril 1886.



La IX$^e$ indique en degrés et minutes l'inclinaison $\Theta$, correspondant à chaque heure. Elle est obtenue en admettant que la moyenne des trois premiers nombres de la VI$^e$ colonne représente la lecture correspondant à la verticalité de l'axe. Les nombres de cette IX$^e$ colonne sont les différences exprimées en degrés et minutes de cette moyenne aux lectures contenues dans la I$^{re}$ colonne. L'inclinaison initiale qui, dans la pratique, ne dépasse généralement pas un degré, est ici très fortement exagérée ; mais la constance de K n'en est que mieux marquée.

On aurait pu prendre comme lecture correspondant à la verticalité de l'axe la moyenne de tous les nombres de la colonne VI, mais il vaut mieux s'en tenir systématiquement aux deux ou trois premiers auxquels correspondent de fortes valeurs de $n$ et qui, par suite, sont probablement plus exacts.

*Dépression de l'horizon de la mer observée en rade.*

| I<br>Heures. | II<br>Lectures sur la vis micrométrique. | III<br>Différences des lectures. | IV<br>K | V<br>Moyennes par trois. | VI<br>$l_1 - K(l_1 - l_2)$ | VII<br>$\dot{n} = \frac{2\pi A}{mgr(l_3 - l_1)}$ | VIII<br>$-\frac{\dot{n}}{n}$ | IX<br>Inclinaison de l'axe. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8h12m14s | 125,8 | | » | » | » | » | » | 76,6 = 3°42′ |
| 13m08s | — 12,2 | 138,0 | 0,551 | 50,4 | 49,8 | 454 | 0,0036 | 61,4 = 2°58′ |
| 13m54s | 100,3 | 112,5 | 0,547 | 48,9 | 49,3 | 381 | 0,0030 | 51,1 = 2°28′ |
| 14m32s | 7,0 | 93,3 | 0,554 | 49,1 | 48,6 | 331 | 0,0029 | 42,2 = 2°02′ |
| 15m07s | 82,2 | 75,2 | 0,558 | 48,1 | 49,0 | 304 | 0,0035 | 33,0 = 1°36′ |
| 15m39s | 21,0 | 61,2 | 0,555 | 48,5 | 48,2 | 272 | 0,0029 | 28,2 = 1°22′ |
| 16m07s | 70,1 | 49,1 | » | » | » | 245 | » | 20,9 = 1°01′ |

Valeur moyenne de K = 0,555.

Valeur moyenne de $-\frac{\dot{n}}{n} = 0{,}0032$.

Moyenne des trois premiers nombres de la col. VI : 49,2.

Graduation corresp. du limbe : . . + 11′20″.

Dépression app. de l'horizon : . . — 5′00.

Collimation (à retrancher) : . . . 16′20″.



Il importe peu d'avoir exactement les valeurs de $n$ et de $\frac{\dot{n}}{n}$, aussi ces nombres grossièrement calculés ne sont donnés qu'à titre de renseignement. C'est sur la constance de K, coefficient relatif au redressement, qu'il convient surtout d'insister. Si le pivot ne s'usait pas, ce coefficient pourrait être considéré comme une constante absolue, du moins pour une même valeur de $r$, ou, ce qui revient au même, pour une même durée d'oscillation de la toupie. Sa valeur étant calculée une fois pour toutes, on obtiendrait la hauteur par deux tops seulement comme le propose M. Fleuriais. Malheureusement, le pivot se détériore assez vite s'il n'est pas très bien trempé, et son aplatissement influe beaucoup sur la valeur de K; il en détruit même la constance, dans une même série, lorsque $r$ est petit. Je ne doute pas, cependant, que l'influence des défauts du pivot devienne insensible sur le redressement d'un gyroscope beaucoup plus grand dont la construction est actuellement décidée, et alors la valeur de K étant suffisamment constante, l'observation de la hauteur pourra se réduire à deux tops, ce qui sera évidemment très avantageux.

Avec le modèle qui est entre mes mains, K diminue assez sensiblement lorsque $r$ augmente. Cette variation pourrait être attribuée soit à un défaut d'équilibrage, soit à un défaut de centrage du pivot. Mais la justification de cette manière de voir m'entrainerait à des considérations théoriques que je ne puis développer aujourd'hui.

Je ne cite que pour mémoire les expériences suivantes ayant pour but d'étudier les effets d'un défaut d'équilibrage.

Supposons que sur la toupie parfaitement centrée et équilibrée on fixe, en dehors de l'axe et dans le plan passant par l'axe de figure et le diamètre sur lequel les lentilles sont placées, une masse $m'$ assez petite pour qu'on puisse la considérer comme un point mathématique. La position de ce point est déterminée par $h$, sa distance, mesurée suivant l'axe, au centre de gravité G de la toupie, et $l$, sa distance à l'axe.

Le nouveau centre de gravité, $G_1$, est à une petite distance $\frac{m'}{m+m'}\sqrt{h^2+l^2}$ de G sur la droite qui joint G à $m'$. L'axe



principal d'inertie le plus voisin de l'axe de figure, relatif au nouveau centre de gravité $G_1$ (y compris la masse $m'$), fait avec l'axe de la toupie un angle, $i$, donné par l'équation

$$\operatorname{tg} 2i = 2 \frac{\frac{mm'}{m+m'} lh}{A - B_1 + \frac{mm'}{m+m'}(l^2 - h^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Je place une masse $m'$ pesant 2 grammes sous le chapeau à une hauteur $h = 0^{cm},9$ au-dessus de G et à la distance $l = 0^{cm},9$ de l'axe. En prenant les valeurs précédemment trouvées, la formule (4) donne $i = 50',4$. Si la toupie ainsi lestée est mise en rotation, on constate que le traït unique de la lentille $L_2$, qui avant l'addition de la masse $m'$ coïncidait avec le trait central de la lentille $L_1$, se superpose maintenant, à très peu près, au trait secondaire extrême qui indique un angle de 50′.

D'après la formule (4) l'angle $i$ est nul, et, par suite, l'axe d'inertie I est parallèle à l'axe de figure, lorsque $h$ est nul. Je place la masse $m'$ dans le creux de l'auget situé sous l'une des lentilles, c'est-à-dire à peu près exactement à la hauteur du centre de gravité. Dépourvue de rotation, la toupie incline très fortement du côté du poids additionnel; mais si on la fait tourner, l'image du trait unique se fixe à sa place normale, au milieu des traits multiples. Le même poids placé sur le chapeau, plus loin en hauteur du centre de gravité, mais beaucoup plus près de l'axe, donne à la toupie immobile une inclinaison bien moins forte; par contre, la déviation du repère dépasse 2° lorsque l'appareil est mis en rotation (*).

Laissant de côté, pour le moment, les causes et les conséquences théoriques de ces faits, on peut en tirer les conclusions pratiques suivantes :

Supposons que par le procédé indiqué par M. Fleuriais (p. 47, § 30, de la brochure) on ait rectifié les lentilles de telle

(*) Voir à la fin de la 2e partie d'autres expériences du même genre.

sorte que les traits soient perpendiculaires à l'axe du gyroscope et que cet axe soit parallèle à la bissectrice AA′ de l'angle $C_1AC_2$ (fig. 2). Si, la toupie étant mise en rotation, on constate que la coïncidence des images des traits $T_1$ et $T_2$ n'a pas lieu, on peut conclure à un défaut de symétrie dans le sens des lentilles. Si les traits paraissent troubles, le défaut doit exister dans le sens perpendiculaire.

Enfin, la dernière expérience fait voir qu'il est avantageux de ramener autant que possible les poids principaux à la hauteur du eentre de gravité; il convient donc de diminuer le plus possible le poids du chapeau.

J'espère pouvoir développer plus tard les considérations théoriques qui conduisent aux résultats qui viennent d'être constatés. Je voudrais seulement faire remarquer, en terminant, que la stabilité de la toupie, malgré les roulis, s'explique par la lenteur de son mouvement. En effet, les deux phases opposées d'une oscillation du navire, qui se succèdent le plus souvent à un intervalle de six secondes, trouvent l'axe de la toupie dans des positions très voisines et doivent produire sur lui des effets inverses qui se compensent en grande partie. Cette compensation doit être d'autant plus parfaite que les roulis sont plus courts, puisque les deux positions de l'axe, aux phases opposées du roulis, sont encore plus rapprochées.

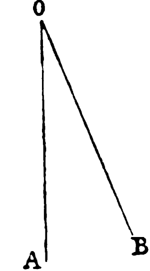
J'en ai fait, du reste, l'expérience en observant la hauteur méridienne, en rade de Rio-Janeiro, dans la plus petite embarcation du bord, le *youyou*, secoué par un assez vif clapotis. La toupie m'a donné la hauteur du soleil à 2′ près, tout aussi exactement qu'à bord du *Niger* par beau temps.

---

## SECONDE PARTIE

Afin d'abréger les calculs, je vais employer la notation des quaternions telle qu'elle est donnée dans l'ouvrage de M. le professeur Tait (*); j'en rappelle brièvement les conventions essentielles.

Soient OA $= \alpha$, OB $= \beta$, deux vecteurs issus du point O.




On a :

$$OA = -AO$$

$T\alpha$ (*tenseur* de $\alpha$) $=$ longueur OA.

$U\alpha$ (unitaire de $\alpha$) $=$ un vecteur ayant une longueur égale à l'unité, dirigé dans le même sens que $\alpha$.

OA $+$ OB $= \alpha + \beta =$ la diagonale, OC, du parallélogramme construit sur OA et OB.

OA $-$ OB $= \alpha - \beta =$ la diagonale BA.

$S\alpha\beta$ (S, *scalar*) $= - T\alpha . T\beta . \cos AOB = S\beta\alpha$.

$S\alpha\beta$ est nul lorsque $\alpha$ et $\beta$ sont perpendiculaires.

$V\alpha\beta$ (V, vectorielle) $= - V\beta\alpha =$ un vecteur, $\gamma$, perpendiculaire au plan AOB et dirigé de telle sorte qu'un observateur couché le long de $\beta$, la tête vers B, et regardant $\alpha$, voie le vecteur $\gamma$ à sa gauche. La longueur de $\gamma$ est $T\alpha . T\beta . \sin AOB$. $V\alpha\beta$ est nul lorsque $\alpha$ et $\beta$ sont parallèles.

Le quaternion $\alpha\beta$ ($\alpha$ multiplié par $\beta$) $= S\alpha\beta + V\alpha\beta$, se réduit à sa partie vectorielle quand $\alpha$ et $\beta$ sont perpendiculaires. Si, de plus, $\beta$ est unitaire, la multiplication de $\alpha$ par $\beta$ consiste à faire tourner $\alpha$, de 90° et de droite à gauche, autour de $\beta$.

Une rotation de droite à gauche (*sinistrorsum*) est positive; une rotation *dextrorsum*, négative.

Si un vecteur $\alpha$ est parallèle à l'axe d'un couple et $T\alpha$ égal à son moment, ce couple sera représenté par $+ \alpha$, ou simplement par $\alpha$, si les forces agissent de droite à gauche pour l'observateur

(*) Traduit par M. Plarr. Gauthier-Villars.

placé suivant $\alpha$ (les pieds vers l'origine de $\alpha$), et par $-\alpha$ dans le cas contraire.

Les lettres grecques, à l'exception de $\pi$, $\delta$, $\theta$ et $\psi$, représenteront des vecteurs; les autres des quantités réelles.

Un point surmontant une lettre signifie une dérivée première par rapport au temps; deux points, une dérivée seconde.

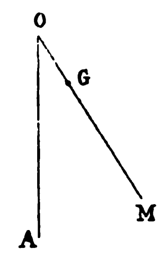
Je rappelle aussi les formules des transformations suivantes qui seront les seules employées :

$$S\alpha V\beta\gamma = S\alpha\beta\gamma = S\gamma\alpha\beta = S\beta\gamma\alpha = -S\beta\alpha\gamma = -S\gamma\beta\alpha = -S\alpha\gamma\beta,$$

$S\alpha\beta\gamma$ est égal, au signe près, à six fois le volume de la pyramide construite sur les trois vecteurs $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Il est nul si ces vecteurs sont coplanaires.

$$V\alpha V\beta\gamma = \gamma S\alpha\beta - \beta S\alpha\gamma.$$

Considérons le gyroscope comme un solide de révolution parfaitement centré et équilibré autour de son axe de figure passant par l'extrémité, O, du pivot et par le centre de gravité G.




Soient :

$OM = \rho$, un vecteur unitaire issu de O et passant par le point G; le vecteur de ce point est, par suite, $r\rho$, $r$ étant la longueur OG.

$OA = \alpha$, un vecteur unitaire dirigé suivant la verticale descendante.

$\theta$, l'angle AOM, et $\psi$, l'angle du plan AOM avec un plan vertical fixe arbitrairement choisi. L'angle $\psi$ est compté positivement (de droite à gauche) pour un observateur debout sur le godet; par conséquent, la vitesse de précession, $\dot{\psi}$, doit être comptée positivement dans le sens $V\alpha\rho$.

Soit N le nombre de fois qu'un même point du gyroscope traverse la partie du plan AOM, située en dessous de l'axe, en une seconde. Si ce plan était immobile, la rotation autour de $\rho$ aurait la vitesse $2\pi N$. D'après la disposition des augets, cette rotation est positive pour l'observateur placé suivant $\rho$ (la tête

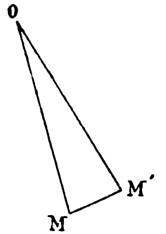
vers M). Comme ce plan tourne autour de $\alpha$ avec la vitesse angulaire $-\dot{\psi}$, la rotation absolue autour de $\rho$ est

$$2\pi N - \dot{\psi}\cos\theta = n;$$

elle est représentée par le vecteur $n\rho$. La précession $\dot{\psi}$ étant très petite relativement à $2\pi N$, $\frac{n}{2\pi}$ représente à très peu près le nombre de tours par seconde.

Rapportons le mouvement à un système d'axes dont le point O serait l'origine et qui se déplaceraient avec ce point en conservant une direction fixe dans l'espace.

Le vecteur $\dot{\rho}$ représente en grandeur et en direction la vitesse du point M; il est perpendiculaire à $\rho$, puisque la longueur de $\rho$ est égale à l'unité. Soit $v$ la valeur absolue de cette vitesse, on a $T\dot{\rho} = v$. Si OM et OM′ représentent deux positions infiniment rapprochées du vecteur $\rho$, on a




$$\text{Vecteur MM}' = \dot{\rho}.dt, \quad \text{longueur MM}' = V.dt$$

Puisque $T\rho = 1$, $v$ représente aussi la vitesse du déplacement angulaire du vecteur $\rho$. Ce déplacement, pendant l'unité de temps, équivaut à une rotation positive d'amplitude $v$ autour d'un axe dirigé suivant le vecteur $V\dot{\rho}\rho$. La longueur de ce vecteur étant $v$, cette rotation est représentée en grandeur et en direction par $V\dot{\rho}\rho$. Le mouvement du gyroscope, relativement aux axes adoptés, résulte des deux rotations $n\rho$ et $V\dot{\rho}\rho$ ; l'axe instantané de rotation est donc représenté en grandeur et en direction par le vecteur

$$n\rho + V\dot{\rho}\rho.$$

La vitesse angulaire autour de cet axe est

$$T(n\rho + V\dot{\rho}\rho) = \left[-(n\rho + V\dot{\rho}\rho)^2\right]^{\frac{1}{2}} = (n^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $T(V\dot{\rho}\rho) = v$ est très petit auprès de $n$, l'axe instantané est très voisin de l'axe de figure.

Le moment résultant des quantités de mouvement autour

de O est évidemment représenté en grandeur et en direction par le vecteur

$$A n_\rho + B V \dot{\rho}\rho$$

très peu différent de $An\rho$.

Les forces qui agissent sur le gyroscope soustrait à l'action de la soufflerie sont :

La pesanteur, appliquée au point G, qui donne, autour du point O, le couple

$$mg V \alpha\rho.$$

La résistance de l'air, qui n'agit guère que pour retarder la rotation $n$, le déplacement de l'axe étant très lent; elle donne le couple

$$-F_\rho,$$

dont le moment, F, augmente avec le diamètre extérieur si le frottement de l'air est proportionnel à la vitesse linéaire des points situés sur le contour extérieur; F est proportionnel au produit de $n$ par le carré du rayon.

Si le pivot est parfaitement aigu et le godet parfaitement poli, il n'y a pas d'autres forces donnant un couple autour du point O (*). Mais les pointes aiguës s'émoussent assez vite ; le godet, quelque poli qu'il soit, ne peut manquer de présenter des aspérités produites, pour le moins, par la présence de quelques grains de poussière et, par suite, le contact doit se faire sur plusieurs points à la fois. Il en résulte des couples s'opposant, d'une part, à la rotation $n$ et, d'autre part, au mouvement angulaire de l'axe, c'est-à-dire à la vitesse $\dot{\rho}$.

Supposons que le pivot, terminé par un très petit cercle de centre O, perpendiculaire à l'axe, se maintienne toujours assez près du fond du godet pour qu'on puisse le considérer comme reposant sur un plan horizontal. L'inclinaison de la toupie ne dépassant pas trois degrés, il est probable que les points de contact seront répartis sur toute la surface du petit cercle. Si l'axe

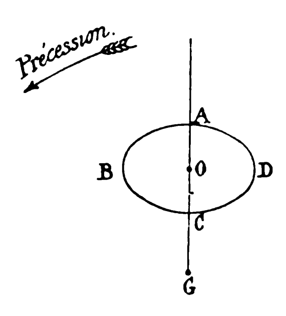
(*) Voir la note relative à l'effet de la rotation de la terre.

de la toupie restait immobile, le seul couple à considérer proviendrait du frottement qui contrarie la rotation $n$. Son axe serait parallèle à $\rho$ et son moment proportionnel à la pression normale, laquelle est à peu près égale au poids et au diamètre du petit cercle. Il serait représenté par

$$— mgf_1\rho,$$

le coefficient $f_1$, toujours positif, dépendant de l'état des surfaces et augmentant avec l'épaisseur de la pointe.

Le déplacement angulaire de l'axe rencontre des résistances d'un autre genre que j'explique ainsi : le redressement de la toupie étant très lent et le mouvement vibratoire presque imperceptible, le déplacement de l'axe provient surtout du mouvement de précession. Soit ABCD le petit cercle vu d'en haut, A son point de contact géométrique avec le godet et le point G indiquant la position du centre de gravité. Le poids du gyroscope est réparti sur les divers points du cercle qui touchent à des aspérités, mais les réactions que ces points supportent sont, en moyenne, plus fortes sur la partie gauche, ABC, que sur la partie droite, ADC, parce que la précession donne, suivant le diamètre AC, une composante qui presse ABC contre le godet et relève ADC. Cette composante augmentant avec l'inclinaison, l'effet produit doit augmenter en même temps et, par suite, il y aura autour de AC un couple résistant dont le moment augmente avec l'angle $\theta$. La rotation $n$ y contribue peut-être en accumulant sous la partie ABC des particules entraînées par ce mouvement rapide.




La rotation autour de AC doit encore éprouver une résistance différente, qui pourrait être relativement très forte si le godet était rugueux et le bord du petit cercle très coupant. Dans ce cas, la partie du pivot voisine de A pénétrerait entre les rugosités, et cette pénétration, d'autant plus profonde que la toupie

serait plus lourde et le petit cercle plus incliné sur la surface du godet, s'étendrait d'autant plus loin du point A sur la circonférence que le rayon de celle-ci serait grand. Il en résulterait encore, autour de AC, un couple augmentant avec le poids de la toupie, avec son inclinaison et avec l'épaisseur de la pointe. Si le pivot est terminé par une surface arrondie, tous ces effets subsistent, mais atténués. En fin de compte, j'admets qu'il existe autour de AC un couple résistant dont le moment est $mgf \sin \theta$, le coefficient $f$ variant avec l'état des surfaces en contact et augmentant avec l'épaisseur de la pointe ; il est représenté par

$$mgf \mathrm{V} \rho \mathrm{V} \alpha \rho ;$$

ce couple est évidemment très petit. Le redressement doit produire un couple du même ordre dont l'axe aurait la direction $\pm \mathrm{V}\alpha\rho$. Il s'ajouterait au couple de la pesanteur, auprès duquel il n'aurait que peu d'effet ; je n'en tiens pas compte. J'estime donc que la non-acuïté de la pointe produit le couple

$$- mgf_1 \rho + mgf \mathrm{V} \rho \mathrm{V} \alpha \rho .$$

On verra plus tard que cette appréciation est d'accord avec les faits observés.

Si cependant l'effet de pénétration dont il vient d'être parlé était prépondérant, ce que je crois probable lorsque la pointe est aplatie par l'usure, le couple résistant autour de AC devrait être considéré comme proportionnel à l'inclinaison du petit cercle de base sur le plan tangent au godet. Si la normale au point de contact avait une direction, $\lambda$, sensiblement écartée de la verticale, il faudrait, je pense, remplacer le couple $mgf \mathrm{V}\rho\mathrm{V}\alpha\rho$ par $mgf \mathrm{V}\rho\mathrm{V}\lambda\rho$.

Supposons d'abord le pivot immobile. Pour avoir l'équation du mouvement, il suffit d'écrire que la vitesse de l'extrémité du vecteur représentant le mouvement résultant, autour de O, des quantités de mouvement est égale en grandeur et en direction à l'axe du couple résultant des forces, autour du même point.





On a

$$\frac{d}{dt}\left[\mathrm{A}n\rho + \mathrm{BV}\rho\dot{\rho}\right] = mgr\mathrm{V}\alpha\rho + mgf\mathrm{V}\rho\mathrm{V}\alpha\rho - (\mathrm{F} + mgf_1)\rho. \quad (1)$$

Si le point O est animé d'une accélération $\ddot{\mu}$, il faut appliquer à chaque masse élémentaire, $\delta m$, du système la force apparente $-\delta m\ddot{\mu}$, laquelle donne autour de O, en désignant par $\gamma$ le vecteur issu de ce point de la masse $\delta m$, le moment $-\mathrm{V}\delta m\ddot{\mu}\gamma$. Le moment résultant de toutes ces forces apparentes partielles sera

$$-\Sigma\mathrm{V}\delta m\ddot{\mu}\gamma = -\mathrm{V}\ddot{\mu}\left(\Sigma\delta m\gamma\right) = -mr\mathrm{V}\ddot{\mu}\rho,$$

puisque $r\rho$ étant le vecteur du centre de gravité, on a $\Sigma\delta mv = mr\rho$. Il faut l'ajouter au second membre de (1) pour avoir l'équation générale

$$\frac{d}{dt}\left[\mathrm{A}n\rho + \mathrm{BV}\rho\dot{\rho}\right] = mg\gamma\mathrm{V}\alpha\rho + mgf\mathrm{V}\rho\mathrm{V}\alpha\rho - (\mathrm{F} + mgf_1)\rho - mr\mathrm{V}\ddot{\mu}\rho \quad (2)$$

La différentiation effectuée au premier membre donne

$$\mathrm{A}\dot{n}\rho + \mathrm{A}n\dot{\rho} + \mathrm{BV}\rho\ddot{\rho},$$
$$\left(\text{parce que } \frac{d}{dt}\mathrm{V}\rho\dot{\rho} = \mathrm{V}\rho\ddot{\rho} + \dot{\rho}\dot{\rho} \quad \text{et} \quad \mathrm{V}\dot{\rho}\dot{\rho} = 0.\right)$$

Opérant par $\mathrm{S}\rho.\times$, il vient, puisque toutes les vectorielles sont perpendiculaires à $\rho$ et que $\mathrm{S}\rho\dot{\rho} = 0$,

$$-\mathrm{A}\dot{n} = \mathrm{F} + mgf_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Par conséquent, si le gyroscope tournait dans le vide sur une pointe aiguë, la rotation $n$ serait constante.

En tenant compte de (3), l'équation (2) devient

$$\dot{\rho} + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}n}\mathrm{V}\rho\ddot{\rho} = \frac{mgr}{\mathrm{A}n}\mathrm{V}\alpha\rho + \frac{mgf}{\mathrm{A}n}\mathrm{V}\rho\mathrm{V}\alpha\rho - \frac{mr}{\mathrm{A}n}\mathrm{V}\ddot{\mu}\rho \; . \; . \quad (4)$$

L'accélération $\ddot{\mu}$ de l'extrémité du pivot est fort complexe. Elle résulte des mouvements que le pivot prendrait sur le godet

si le sextant était immobile et de ceux qui sont imprimés au sextant par la main de l'observateur ou par les roulis du navire; ces derniers constituent les principales causes perturbatrices. L'équation (4) montre qu'elles sont multipliées par le très petit facteur $\frac{mr}{An}$ égal à peu près à 0,00008 ; ceci rend compte immédiatement de la stabilité de la toupie pendant les roulis. Cette stabilité augmente, du reste, à mesure que $\frac{mr}{An}$ diminue, et il est avantageux de donner à ce facteur la plus petite valeur que permettent les circonstances. Nous avons remarqué déjà que les accélérations du roulis changeant de sens toutes les six secondes, leurs effets se neutralisent en partie ; l'axe se comporte donc, en moyenne, comme si le sextant était immobile.

On voit aussi que l'axe $\rho$ étant très voisin de la verticale, les accélérations de sens vertical n'auront que très peu d'effet.

Opérons sur (4) par $V\dot{\rho}.\times$, il vient, en tenant compte que $S\rho\dot{\rho} = 0$,

$$S\dot{\rho}\dddot{\rho} = \frac{mgr}{B}S\alpha\dot{\rho} - \frac{mgf}{B}S\dot{\rho}\alpha\rho - \frac{mr}{B}S\ddot{\mu}\dot{\rho},$$

et en intégrant

$$\dot{\rho}^2 = \dot{\rho}_0^2 + \frac{2mgr}{B}S\alpha(\rho - \rho_0) - \frac{2mgf}{B}\int_0^t dtS\dot{\rho}\alpha\rho - \frac{2mr}{B}\int_0^t dtS\ddot{\mu}\dot{\rho},$$

On a :

$$\dot{\rho}^2 = -v^2, \quad \dot{\rho}_0^2 = -V_0^2$$

($V_0$ étant la vitesse initiale),

$$S\dot{\rho}\alpha\rho = -\sin^2\theta\dot{\psi}, \quad S\ddot{\mu}\dot{\rho} = -vT\ddot{\mu}\cos\widehat{(U\dot{\rho})(U\ddot{\mu})},$$

et l'équation précédente traduite en notation ordinaire donne

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2mgr}{B}(\cos\theta - \cos\theta_0) - \frac{2mgr}{B}\int_0^t f\sin^2\theta\dot{\psi}dt,$$
$$- \frac{2mr}{B}\int_0^t v(T\ddot{\mu})\cos\widehat{(U\dot{\rho})(U\ddot{\mu})}\,dt \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

C'est l'équation des forces vives. Elle ne contient pas $n$ expli-

On a

$$\frac{d}{dt}\left[\mathrm{A}n\rho + \mathrm{BV}\rho\dot{\rho}\right] = mgr\mathrm{V}\alpha\rho + mgf\mathrm{V}\rho\mathrm{V}\alpha\rho - (\mathrm{F} + mgf_1)\rho. \qquad (1)$$

Si le point O est animé d'une accélération $\ddot{\mu}$, il faut appliquer à chaque masse élémentaire, $\delta m$, du système la force apparente $-\delta m\ddot{\mu}$, laquelle donne autour de O, en désignant par $\gamma$ le vecteur issu de ce point de la masse $\delta m$, le moment $-\mathrm{V}\delta m\ddot{\mu}\gamma$. Le moment résultant de toutes ces forces apparentes partielles sera

$$-\Sigma\mathrm{V}\delta m\ddot{\mu}\gamma = -\mathrm{V}\ddot{\mu}\left(\Sigma\delta m\gamma\right) = -mr\mathrm{V}\ddot{\mu}\rho,$$

puisque $r\rho$ étant le vecteur du centre de gravité, on a $\Sigma\delta mv = mr\rho$. Il faut l'ajouter au second membre de (1) pour avoir l'équation générale

$$\frac{d}{dt}\left[\mathrm{A}n\rho + \mathrm{BV}\rho\dot{\rho}\right] = mg\gamma\mathrm{V}\alpha\rho + mgf\mathrm{V}\rho\mathrm{V}\alpha\rho - (\mathrm{F} + mgf_1)\rho - mr\mathrm{V}\ddot{\mu}\rho \quad (2)$$

La différentiation effectuée au premier membre donne

$$\mathrm{A}\dot{n}\rho + \mathrm{A}n\dot{\rho} + \mathrm{BV}\rho\ddot{\rho},$$

$$\left(\text{parce que } \frac{d}{dt}\mathrm{V}\rho\dot{\rho} = \mathrm{V}\rho\ddot{\rho} + \dot{\rho}\dot{\rho} \quad \text{et} \quad \mathrm{V}\dot{\rho}\dot{\rho} = 0.\right)$$

Opérant par $\mathrm{S}\rho.\times$, il vient, puisque toutes les vectorielles sont perpendiculaires à $\rho$ et que $\mathrm{S}\rho\dot{\rho} = 0$,

$$-\mathrm{A}\dot{n} = \mathrm{F} + mgf_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Par conséquent, si le gyroscope tournait dans le vide sur une pointe aiguë, la rotation $n$ serait constante.

En tenant compte de (3), l'équation (2) devient

$$\dot{\rho} + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}n}\mathrm{V}\rho\ddot{\rho} = \frac{mgr}{\mathrm{A}n}\mathrm{V}\alpha\rho + \frac{mgf}{\mathrm{A}n}\mathrm{V}\rho\mathrm{V}\alpha\rho - \frac{mr}{\mathrm{A}n}\mathrm{V}\ddot{\mu}\rho \; . \; . \quad (4)$$

L'accélération $\ddot{\mu}$ de l'extrémité du pivot est fort complexe. Elle résulte des mouvements que le pivot prendrait sur le godet

si le sextant était immobile et de ceux qui sont imprimés au sextant par la main de l'observateur ou par les roulis du navire; ces derniers constituent les principales causes perturbatrices. L'équation (4) montre qu'elles sont multipliées par le très petit facteur $\frac{mr}{An}$ égal à peu près à 0,00008 ; ceci rend compte immédiatement de la stabilité de la toupie pendant les roulis. Cette stabilité augmente, du reste, à mesure que $\frac{mr}{An}$ diminue, et il est avantageux de donner à ce facteur la plus petite valeur que permettent les circonstances. Nous avons remarqué déjà que les accélérations du roulis changeant de sens toutes les six secondes, leurs effets se neutralisent en partie; l'axe se comporte donc, en moyenne, comme si le sextant était immobile.

On voit aussi que l'axe $\rho$ étant très voisin de la verticale, les accélérations de sens vertical n'auront que très peu d'effet.

Opérons sur (4) par $V\dot{\rho}.\times$, il vient, en tenant compte que $S\rho\dot{\rho} = 0$,

$$S\dot{\rho}\ddot{\rho} = \frac{mgr}{B} S\alpha\dot{\rho} - \frac{mgf}{B} S\dot{\rho}\alpha\rho - \frac{mr}{B} S\ddot{\mu}\dot{\rho},$$

et en intégrant

$$\dot{\rho}^2 = \dot{\rho}_0^2 + \frac{2mgr}{B} S\alpha(\rho - \rho_0) - \frac{2mgf}{B}\int_0^t dt S\dot{\rho}\alpha\rho - \frac{2mr}{B}\int_0^t dt S\ddot{\mu}\dot{\rho},$$

On a :

$$\dot{\rho}^2 = -v^2, \quad \dot{\rho}_0^2 = -V_0^2$$

($V_0$ étant la vitesse initiale),

$$S\dot{\rho}\alpha\rho = -\sin^2\theta\dot{\psi}, \quad S\ddot{\mu}\dot{\rho} = -vT\ddot{\mu}\cos\widehat{(U\dot{\rho})(U\ddot{\mu})},$$

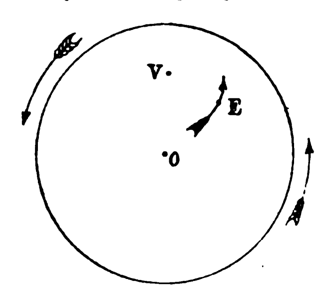
et l'équation précédente traduite en notation ordinaire donne

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2mgr}{B}(\cos\theta - \cos\theta_0) - \frac{2mgr}{B}\int_0^t f\sin^2\theta\dot{\psi}dt,$$

$$-\frac{2mr}{B}\int_0^t v(T\ddot{\mu})\cos\widehat{(U\dot{\rho})(U\ddot{\mu})}\,dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

C'est l'équation des forces vives. Elle ne contient pas $n$ expli-

citement; ce serait, à l'exclusion du terme en $f$, l'équation des forces vives du pendule composé constitué par la toupie dépourvue de rotation et oscillant sur son pivot, si ce pivot était animé de l'accélération $\ddot{\mu}$, les conditions initiales étant, du reste, les mêmes. Le terme en $f$, qui provient d'un couple résistant, ne peut produire qu'une perte d'énergie et, par suite, l'axe du gyroscope aura une vitesse inférieure à la plus grande vitesse que peut prendre ce pendule. Comme l'inclinaison initiale est petite, on peut admettre que $v$ sera petit si la vitesse initiale $v_0$ est faible. Or, pendant la mise en marche, l'axe de la boite cylindrique, c'est-à-dire celui du couple moteur, et l'axe du gyroscope, s'écartant peu de la verticale, l'énergie dépensée par la soufflerie est presque entièrement emmagasinée dans la rotation $n$ et ne peut produire que peu d'effet sur la vitesse $v$. On peut faire, du reste, l'expérience suivante, à terre ou en rade, le navire étant tranquille : caler la boite cylindrique dans une position oblique, puis marquer sur son couvercle le point V, où vient aboutir la verticale passant par le pivot; ce point est indiqué par la tige supérieure de la toupie au repos. Quand la soufflerie a agi pendant quelques secondes, la tige vient se fixer au-dessous d'un point E, placé comme dans la figure où les flèches extérieures indiquent le sens du courant d'air moteur. Si on cesse un instant de souffler, la tige prend autour de V son mouvement de précession indiqué par la petite flèche; quelques coups de soufflet la ramènent ensuite au point E ou dans une position voisine. On peut donc admettre qu'à l'instant initial, c'est-à-dire au moment où la soufflerie cesse, l'axe du gyroscope est à peu près immobile et considérer la vitesse initiale comme nulle ou du moins assez petite pour que son carré et son produit par sin θ soient négligeables.




La vitesse $v$ est donc petite. On peut lui assigner une limite précise si le pivot est aigu et immobile. Dans ce cas, les termes

en $f$ et en $\ddot{\mu}$ disparaissent des équations précédentes et celle des forces vives donne

$$v^2 = \frac{2mgr}{B}(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

Opérant sur (1) par $S\alpha.\times$, il vient

$$S\alpha\dot{\rho} + \frac{B}{An} S\alpha\rho\ddot{\rho} = 0,$$

et en intégrant

$$S\alpha(\rho - \rho_0) + \frac{B}{An} S\alpha\rho\dot{\rho} + \int_0^u \frac{B}{An}\frac{\dot{n}}{n} S\alpha\rho\dot{\rho}\,.\,dt = 0.$$

ou bien

$$\cos\theta - \cos\theta_0 = \frac{B}{An}\sin^2\theta\dot{\psi} + \int_0^u \frac{B}{An}\frac{\dot{n}}{n}\sin^2\theta\dot{\psi}\,.\,dt.$$

Comme $\frac{1}{n}$ est positif et $\frac{\dot{n}}{n}$ négatif, le deuxième terme est négatif et on a

$$\cos\theta - \cos\theta_0 < \frac{B}{An}\sin^2\theta\dot{\psi}$$

$\cos\theta - \cos\theta_0$ est, du reste, toujours positif comme l'indique l'équation des forces vives. On a donc

$$v^2 < \frac{2mgr}{An}\sin^2\theta\dot{\psi} < \frac{2mgr}{An} v \sin\theta,$$

puisque $\sin\theta\dot{\psi} \leq v$, et, par conséquent,

$$v < \frac{2mgr}{An}\sin\theta.$$

Pour $\theta = 3°$ et $n = 400$, la limite de $v$ serait 0,005, environ.

En considérant que les effets du roulis se compensent en partie et que la non-acuité de la pointe entraîne une perte de force vive, on peut admettre que cette limite est applicable au cas général.

Posons

$$\rho_1 = \rho + \frac{B}{An} V \rho\dot{\rho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Le vecteur $\rho_1$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un des côtés, $\rho$, a pour longueur l'unité; l'autre côté $\frac{B}{An}V\rho\dot{\rho}$ a pour longueur $\frac{Bv}{An} < 0{,}005 . \frac{B}{An}$, soit à peu près 0,000 01. L'angle que font entre eux les vecteurs $\rho$ et $\rho_1$ est plus petit que

arc tang 0,0000 15 soit environ 3″.

Les deux vecteurs $\rho$ et $\rho_1$ se confondent à très peu près. Élevant (7) au carré, on a

$$\rho_1^2 = -1 - \left(\frac{Bv}{An}\right)^2 .$$

On peut donc considérer $\rho_1$ comme un vecteur unitaire. On a

$$\dot{\rho}_1 = \dot{\rho} + \frac{B}{An} V \rho\ddot{\rho} - \frac{B}{An}\frac{\dot{n}}{n} V \rho\dot{\rho}.$$

La fraction $\frac{\dot{n}}{n}$ est à peu près égale à 0,003; on peut la considérer comme du même ordre que $\frac{B}{An}$. Le dernier terme est, par suite, de l'ordre $\left(\frac{B}{An}\right)^2 v$. Si dans l'équation (4) on remplace $\rho$ par $\rho_1 - \frac{B}{An}V\rho\dot{\rho}$, on aura à des termes près de l'ordre $\frac{V}{(An)^2}$

$$\dot{\rho}_1 = \frac{mgr}{An} V\alpha\rho_1 + \frac{mgf}{An} V\rho_1 V\alpha\rho_1 - \frac{mr}{An} V\ddot{\mu}\rho_1 \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Parmi les termes négligés, ceux qui contiennent $f$ sont évidemment très petits; celui qui contient $\ddot{\mu}$ est plus petit que celui qui contient $g$, car les accélérations du roulis sont bien inférieures à celle de la pesanteur. Le plus grand des termes négligés est donc $\frac{mgr}{An}\frac{B}{An}V\alpha V\rho\dot{\rho}$ dont la longueur est inférieure à $\frac{mgr}{An}\frac{Bv}{An}$, c'est-à-dire inférieure à 0,000 000 7. Si donc la direction du vecteur représenté par ce terme était toujours la même relativement à $\rho_1$ (par exemple s'il conservait toujours la direction $V\alpha\rho_1$), son influence sur la position de $\rho_1$ ne serait, au bout de cinq

minutes, que 0,000 000 7 × 300 = 0,000 21 ; c'est à peine un arc de 1′. La suppression de ce terme et *a fortiori* celle des autres est donc légitime, et (8) représente bien l'équation du mouvement du vecteur $\rho_1$, c'est-à-dire celle du mouvement *visible* de l'axe du gyroscope.

Le vecteur $\rho_1$ pouvant être considéré comme unitaire, on a en désignant respectivement par $\theta_1$ et $\psi_1$ son inclinaison et son angle de précision.

$$\dot{\rho}_1 = \dot{\psi}_1 \mathrm{V}\alpha\rho_1 - \frac{\dot{\theta}_1}{\sin\theta_1} \mathrm{V}\rho_1\mathrm{V}\alpha\rho_1.$$

Si le pivot était immobile, on aurait par (8)

$$\dot{\psi}_1 = \frac{mgr}{\mathrm{A}n}, \quad \frac{\dot{\theta}_1}{\sin\theta_1} = -\frac{mgf}{\mathrm{A}n}, \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

d'où

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\dot{\psi}_1 \sin\theta_1} = -\frac{f}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

L'équation (10) exprime que la courbe qui serait tracée par l'extrémité du vecteur $\rho_1$ sur la sphère-unité ayant son centre en O, ferait avec les méridiens verticaux qu'elle couperait sur cette sphère un angle dont la tangente serait $\frac{f}{r}$ ; le signe négatif exprime que cet angle serait aigu du côté du pôle inférieur. Si $f$ est constant, cette courbe est une loxodromie, ce qui serait d'accord avec la constance précédemment constatée du coefficient K. La constance de $f$, que j'admets pour le moment, sera soumise ultérieurement à un autre examen.

Remarquons, en passant, que l'effet du dernier terme de (8) est de donner à la vitesse angulaire de l'axe une composante perpendiculaire à la direction de $\ddot{\mu}$, ce qui est conforme à une propriété bien connue des gyroscopes. La méthode de maxima et minima sera d'autant plus exacte que l'axe sera moins dévié, dans le sens du redressement, au moment de ces phases extrêmes. Par conséquent, si le navire roule, il sera avantageux, pour vérifier la collimation par l'observation de l'horizon, de viser dans le sens perpendiculaire à la quille. Pour la même

raison, il faudrait viser dans le sens longitudinal si le navire tangue.

Examinons le mouvement de plus près dans le cas où l'accélération du pivot serait nulle ou négligeable.

Posons

$$x = \dot{\psi}, \quad y = -\frac{\dot{\theta}}{\sin\theta}$$

et par suite

$$\dot{\rho} = x V\alpha\rho + y V\rho V\alpha\rho.$$

Les valeurs de $x$ et de $y$ sont de l'ordre $\frac{2mgr}{An}$. On a

$$V\rho\dot{\rho} = -x V\rho V\alpha\rho + y V\alpha\rho,$$

$$V\rho\ddot{\rho} = -\dot{x} V\rho V\alpha\rho + \dot{y} V\alpha\rho - x\left[V\dot{\rho}V\alpha\rho + V\rho V\alpha\dot{\rho}\right] + y V\alpha\dot{\rho}.$$

L'expression entre crochets est égale à

$$\rho S\alpha\dot{\rho} + \dot{\rho} S\alpha\rho.$$

Si on remplace dans cette expression et dans le dernier terme $\dot{\rho}$ par sa valeur en $x$ et en $y$, on aura des termes en $x^2$, $y^2$ et $xy \sin\theta$ qui portés dans (1) donneront des termes en $\frac{\sin\theta}{(An)^3}$ que je néglige. L'équation (1) devient

$$\left(x + \frac{B}{An}\dot{y}\right) V\alpha\rho + \left(y - \frac{B}{An}\dot{x}\right) V\rho V\alpha\rho = \frac{mgr}{An} V\alpha\rho + \frac{mgf}{An} V\rho V\alpha\rho,$$

qui équivaut aux deux suivantes

$$x + \frac{B}{An}\dot{y} = \frac{mgr}{An}, \quad y - \frac{B}{An}\dot{x} = \frac{mgf}{An}.$$

En considérant la rotation $n$ comme constante on obtient sans peine

$$\left.\begin{aligned} x = \dot{\psi} &= \frac{mgr}{An} + a \sin\frac{An}{B} t + b \cos\frac{An}{B} t, \\ y = -\frac{\dot{\theta}}{\sin\theta} &= \frac{mgf}{An} + a \cos\frac{An}{B} t - b \sin\frac{An}{B} t, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (11)$$

les constantes $a$ et $b$ devant être déterminées par les valeurs des composantes de la vitesse initiale; on voit qu'à l'approximation que comportent ces équations, la vitesse initiale n'affecte pas les premiers termes $\frac{mgr}{An}$ et $\frac{mgf}{An}$ qui représentent le *mouvement moyen* déjà trouvé (9). Les deux derniers termes représentent un mouvement oscillatoire ou vibratoire dont la durée très courte est $\frac{2\pi\beta}{An}$, soit à peu près un centième de seconde, pendant laquelle $n$ n'a pas sensiblement varié.

Si le gyroscope tourne dans le vide sur une pointe obsolument aiguë, $n$ est véritablement une constante, et si la vitesse initiale est nulle, (11) devient

$$\dot{\psi} = \frac{mgr}{An}\left(1 - \cos\frac{An}{B}t\right), \quad -\frac{\dot{\theta}}{\sin\theta} = \frac{mgr}{An}\sin\frac{An}{B}t \, . \quad (12)$$

Ce sont bien les équations connues de la toupie, à cette différence près qu'ici le centre de gravité est en dessous du pivot.

L'amplitude du mouvement vibratoire est à peu près $\frac{2mgrB}{(An)^2}\sin\theta$; ce mouvement est à peine visible; son amplitude est l'angle de 3″ précédemment trouvé qui représente le plus grand écart entre les vecteurs $\rho$ et $\rho_1$. Si ce mouvement était sensible l'image du repère manquerait de netteté; c'est au contraire une ligne noire parfaitement définie.

J'ai supposé le pivot immobile; voyons si cette hypothèse est admissible lorsque le sextant est immobile. Calculons la pression qu'un pivot aigu et immobile exerce sur le godet. Soit $\pi$, en grandeur et direction, la réaction du godet. Puisque la pointe du pivot ne bouge pas, l'accélération du centre de gravité est $r\ddot{\rho}$. On a donc

$$mg\alpha + \Pi = mr\ddot{\rho}$$

On tire de (4), en opérant par $V\dot{\rho}\times$ et en tenant compte que $S\rho\ddot{\rho} = -\dot{\rho}^2 = v^2$ (parce que $S\rho\dot{\rho} = 0$, d'où $S\rho\ddot{\rho} + \dot{\rho}^2 = 0$),

$$\ddot{\rho} = \frac{An}{B}V\left(\dot{\rho} - \frac{mgr}{An}V\alpha\rho\right)\rho + \rho\dot{\rho}^2.$$

Si l'on suppose que la toupie tourne dans le vide, on trouve en tenant compte de (12)

$$\ddot{\rho} = \frac{mgr}{B}\left\{\cos\frac{An}{B}t V\rho V\alpha\rho + \sin\frac{An}{B}t V\alpha\rho\right\} - v^2\rho$$

$$= -\rho\left\{v^2 + \frac{mgr}{B}\cos\theta\cos\frac{An}{B}t\right\} + \alpha\frac{mgr}{B}\cos\frac{An}{B}t + \frac{mgr}{B}\sin\frac{An}{B}t V\alpha\rho.$$

On a identiquement

$$\rho = - V\alpha V\alpha\rho - \alpha S\alpha\rho.$$

Il vient donc

$$\left.\begin{aligned} \Pi = mr\ddot{\rho} - mg\alpha = -\alpha\left\{mg\left[1 - \frac{mr^2}{B}\sin^2\theta\cos\frac{An}{B}t + \frac{rv^2}{g}\right]\right\} \\ + mg\left(\frac{rv^2}{g} + \frac{mr^2}{B}\cos\theta\cos\frac{An}{B}t\right)V\alpha V\alpha\rho + mg\frac{mr^2}{B}\sin\frac{An}{B}t V\alpha\rho. \end{aligned}\right\} (13)$$

Le premier terme représente la réaction de bas en haut. Comme $\frac{mr^2}{B}$ est égal à 0,005 environ et que $\frac{rv^2}{g}$ est excessivement petit, on voit que cette réaction est à peu près égale au poids. Les deux autres termes représentent les réactions horizontales. La première montre, par la présence du terme $mrv^2$, toujours positif, que le pivot s'appuiera un peu plus fortement sur le godet du côté où se trouve le centre de gravité. La troisième réaction, dirigée dans le sens de la précession est alternativement positive et négative.

La résultante des réactions horizontales réduite à ses termes principaux est à peu près $mg\frac{mr^2}{B}\sin\theta$. Il suffirait que le coefficient de frottement (si toutefois les lois ordinaires du frottement sont applicables ici) fût égal à $\frac{mr^2}{B}\sin\theta$ (environ 0,0002 pour $\theta = 3°$) pour empêcher le glissement du pivot; son immobilité est donc possible. En tous cas, s'il glisse, c'est que la résistance horizontale qu'il rencontre est plus petite que $mg\frac{mr^2}{B}\sin\theta$. Examinons l'influence d'une résistance horizontale, $\Phi$, de cet ordre de grandeur. La réaction verticale étant à peu près égale au poids, on a, à des termes près du second ordre

$$m(\ddot{\mu} + r\ddot{\rho}) = \Phi,$$

$\ddot{\mu} + r\ddot{\rho}$ étant évidemment l'accélération du centre de gravité ; et (4) donne, en tenant compte que $B_1$, moment d'inertie relatif au centre de gravité, est égal à $mr^2 + B$,

$$\dot{\rho} + \frac{B_1}{An} V\dot{\rho}\ddot{\rho} = \frac{mgr}{An} V\alpha\rho - \frac{r}{An} V\Phi\rho.$$

En désignant ici par $\rho_1$ le vecteur $\rho + \frac{B_1}{An} V\dot{\rho}\rho$, on trouvera, avec l'approximation de l'équation (8), l'équation du mouvement moyen

$$\dot{\rho}_1 = \frac{mgr}{An} V\alpha\rho_1 - \frac{r}{An} V\Phi\rho_1; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

qui donne en opérant par $S\alpha \times$

$$S\alpha\dot{\rho} = \sin\theta.\dot{\theta} = \frac{r}{An} S\Phi V\alpha\rho_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Par conséquent, on a, en valeur absolue,

$$\sin\theta\,\dot{\theta} < \frac{r}{An} \sin\theta_1 . T\Phi < \frac{mgr}{An}\frac{mr^2}{B} \sin^2\theta \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

$$\frac{\dot{\theta}}{\sin\theta} < \frac{mgr}{An}\frac{mr^3}{B}, \text{ soit à peu près } 0{,}0004.$$

Si la résistance horizontale est nulle, l'équation (15) donne $\theta_1 = 0$, et il n'y a pas de redressement apparent; s'il y a une force résistante, l'équation (16) montre que son effet sur le redressement est presque insensible.

Par conséquent, l'accélération du pivot ne peut avoir qu'une très faible influence. La même conclusion doit subsister pour une pointe mousse, car la résistance, $\Phi$, qu'elle éprouve est encore plus petite que la précédente. On trouverait de même que l'effet produit sur la précession est du même ordre. Je suis donc conduit à considérer le mouvement angulaire de l'axe comme indépendant des mouvements du pivot, si le sextant est immobile.

Consultons, du reste, l'expérience. Si le mouvement du pivot

a une influence sensible, le redressement doit être modifiée par la forme du godet; il n'en est rien. Si cette influence était prépondérante, il semblerait, après ce qui vient d'être dit, qu'une pointe de mousse donnerait un redressement moins rapide; on constate précisément le contraire.

Quelle que soit la loi du mouvement de la toupie. le coefficient

$$K = \frac{l_1 - l_2}{(l_1 - l_2) + (l_2 - l_3)} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{(\theta_1 + \theta_2) + (\theta_2 + \theta_3)},$$

peut être considéré comme une mesure du redressement. S'il est égal à $^1/_2$, l'axe conserve la même inclinaison. Le redressement est d'autant plus rapide que K est supérieur à $^1/_2$. Examinons les valeurs de ce coefficient dans diverses circonstances.

Dans les observations suivantes, les lectures peuvent être erronées d'une ou deux minutes, soit les deux tiers d'une division de la vis micrométrique; l'erreur qui en résulte sur K peut atteindre 0,01 et même 0,02. L'incertitude des angles observés provient de l'épaisseur du repère et peut être aussi du défaut de netteté de l'horizon sur lequel ils ont été pris.

La première colonne des tableaux suivants donne les heures des maxima et des minima; elles ne sont exactes qu'à deux ou trois secondes près; la seconde colonne donne la différence des heures; la troisième, les lectures $l_1$, $l_2$, $l_3$... faites sur la vis micrométrique (*) au moment des tops; la quatrième, les différences des lectures; la cinquième, les valeurs de K; la sixième, le résultat de la formule $l_1 + K(l_2 - l_1)$ qui exprime la graduation de la vis micrométrique correspondant à la verticalité de l'axe de la toupie. Je parlerai plus loin du nombre intitulé $-\frac{\dot{n}}{n}$ donné par la sixième colonne.

La même pointe aiguë pivotant successivement sur deux godets très dissemblables, l'un conique, l'autre sphérique et d'un rayon de $3^{mm},4$ donne les résultats suivants.

Toutes les observations sont prises sur l'horizon, le sextant étant appuyé et à peu près immobile.

(*) Une division de la vis micrométrique équivaut à $2',9$.

*Pointe très aiguë.*

Durée de l'oscillation pendulaire autour du pivot T = $0^s,443$.
Distance du centre de gravité à la pointe du pivot, $r = 0^{cm},104$.

***Première expérience.*** Godet conique :

| Heures. | Diff. | Lect. | Diff. | K. | $l_1+K(l_2-l_1)$ | $-\frac{\dot n}{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4h 15m 43s | 43s | 128,8 | 127,2 | 0,516 | 47,2 | |
| 15 50 | 37 | − 14,4 | 119,2 | 0,524 | 48,1 | |
| 16 27 | 32 | 104,8 | 107,8 | 0,517 | moy. 47,7 | 0,0033 |
| 16 59 | 31 | − 3,0 | 100,5 | 0,512 | | 0,0027 |
| 17 30 | 27 | 97,5 | 95,9 | 0,507 | | 0,0030 |
| 17 57 | 26 | + 1,6 | 93,3 | | | |
| 18 23 | | 94,9 | | | | |

La graduation 47,7 de la vis correspond à + 0',8 sur le sextant.
Dépression apparente 5',0 (incertaine),

Collimation 5',8

Valeur moyenne de K = 0,517.

Valeur moyenne de $-\frac{\dot n}{n} = 0,0030$.

***Deuxième expérience.*** Godet sphérique de $3^{mm},4$ de rayon :

| Heures. | Diff. | Lect. | Diff. | K. | $l_1+K(l_2-l_1)$ | $-\frac{\dot n}{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4h 53m 58s | 56s | 98,1 | 95,7 | 0,507 | 49,4 | |
| 54 54 | 47 | 2,4 | 92,9 | 0,514 | 50,1 | |
| 55 41 | 39 | 95,3 | 87,9 | 0,512 | moy. 49,7 | 0,0037 |
| 56 20 | 35 | 7,4 | 83,9 | 0,508 | | 0,0032 |
| 56 55 | 32 | 91,3 | 81,4 | 0,511 | | 0,0037 |
| 57 27 | 26 | 9,9 | 78,0 | | | |
| 57 56 | | 87,9 | | | | |

La graduation 49,7 correspond à + 6' sur le sextant.
Dépression apparente 5'

Collimation 11'

Valeur moyenne de K = 0,510.

Valeur moyenne de $-\frac{\dot n}{n} = 0,0035$.

Deux autres expériences m'ont donné avec la même pointe

Sur le godet conique, $K = 0{,}518$, $-\frac{\dot{n}}{n} = 0{,}0033$

Sur le godet sphérique, $K = 0{,}522$, $-\frac{\dot{n}}{n} = 0{,}0036$

La forme du godet n'a donc pas d'influence sensible si la pointe est aiguë. La moyenne des quatre observations serait

$$K = 0{,}514, \qquad -\frac{\dot{n}}{n} = 0{,}0035.$$

J'opère maintenant avec une pointe très fortement arrondie, d'abord sur le même godet sphérique de $3^{mm},4$, puis sur un autre plus petit ayant $1^{mm},2$ de rayon.

*Pointe fortement arrondie.*

Durée d'oscillation pendulaire, $T = 0^{s},45$, $r = 0^{cm},099$.

*Première expérience.* Godet de $3^{mm},4$ de rayon :

| Heures. | Diff. | Lect. | Diff. | K. | $l_1+K(l_2-l_1)$ | $-\frac{\dot{n}}{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1h 58m 44s | 59s | — 9,2 | 92,8 | 0,631 | 49,4 | |
| 59 43 | 50 | 83,6 | 54,1 | 0,615 | 50,3 | |
| 2 00 33 | 45 | 29,5 | 33,8 | 0,615 | moy. 49,9 | 0,0034 |
| 01 08 | 34 | 63,3 | 21,2 | 0,644 | | 0,0038 |
| 01 52 | 35 | 42,1 | 11,7 | | | |
| 02 27 | | 53,8 | | | | |

La division 49,9 donne, au sextant, + 5',3 — collimation = 10',3.

Valeur moyenne de K = 0,626; valeur moyenne de $-\frac{\dot{n}}{n} = 0',0036$.

*Deuxième expérience.* Godet de $1^{mm},2$ de rayon :

| Heures. | Diff. | Lect. | Diff. | K. | $l+K(l_2-l_1)$ | $-\frac{\dot{n}}{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5h 42m 53s | 58s | — 18,2 | 105,2 | 0,642 | 49,3 | |
| 43 51 | 47 | 86,9 | 58,6 | 0,615 | 50,9 | |
| 44 38 | 39 | 28,3 | 36,7 | 0,615 | moy. 50,1 | 0,0039 |
| 45 17 | 35 | 65,0 | 23,0 | 0,614 | | 0,0034 |
| 45 52 | 31 | 42,0 | 12,8 | | | |
| 46 23 | | 54,8 | | | | |

La graduation 50,1 donne au sextant 5',6; d'où collimation = 10',6.

Valeur moyenne de K = 0,622; valeur moyenne de $-\frac{\dot{n}}{n}$ = 0,0036.

Le changement de godet est encore sans influence. Mais la non-acuité de la pointe augmente beaucoup la valeur de K. Remarquons aussi qu'elle n'a pas d'influence marquée sur $-\frac{\dot{n}}{n}$. Tout ceci est d'accord avec les hypothèses proposées.

Voyons maintenant à quelles conséquences conduit la constance de $f$. Si $f$ est constant, l'équation (10) donne

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}\, e^{-\frac{f}{r}(\psi - \psi_0)}, \quad \text{ou bien} \quad \theta = \theta_0\, e^{-\frac{f}{r}(\psi - \psi_0)},$$

puisque les angles $\theta$ sont très petits. L'angle de précession décrit entre un maximum et le minimum suivant est égal à $\pi$. On a donc pour la série des inclinaisons $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$... correspondant aux tops successifs

$$\theta_2 = \theta_1 e^{-\frac{f\pi}{r}}, \quad \theta_3 = \theta_1 e^{-\frac{2f\pi}{r}}, \quad \text{etc.}$$

d'où

$$K = \frac{\theta_1 + \theta_2}{(\theta_1 + \theta_2) + (\theta_2 + \theta_3)} = \frac{1}{1 + e^{-\frac{f\pi}{r}}} \quad . \; . \; . \quad (17)$$

Si $f$ est constant, K est constant pour la même valeur de $r$, ce qui s'est déjà vérifié.

On a aussi par (17)

$$e^{+\frac{f\pi}{r}} = \frac{K}{1 - K} \quad \text{d'où} \quad f = \pi r \log \frac{K}{1 - K} \quad . \; . \quad (18)$$

Si $f$ est constant, le produit $\pi r \log \frac{k}{1-k}$ doit rester le même, quel que soit $r$, pour une même pointe, aussi longtemps, du moins, qu'elle n'est pas déformée par l'usure. Pour le vérifier, il suffit d'observer les coefficients K que donne une pointe en bon état pour différentes valeurs de $r$. Voici quelques expériences :

*Pointe légèrement arrondie.*

*Première expérience.* T = 0ˢ,376, $r$ = 0ᶜᵐ, 141 :

| Lect. | Diff. | K. | $l_1+K(l_2-l_1)$ |
|---|---|---|---|
| — 1,4 | | | |
| | 95,7 | 0,535 | 49,8 |
| 94,3 | | | |
| | 83,1 | 0,529 | 50,4 |
| 11,2 | | | |
| | 74,0 | 0,531 | |
| 85,2 | | | |
| | 65,4 | | |
| 19,8 | | | |

Collimation obtenue 9′,9. Val moyen de K 0,532. $f = \pi r \log \frac{K}{1-K} = 0,058.$

*Deuxième expérience.* T = 0ˢ,334, $r$ = 0ᶜᵐ,185 :

| Lect. | Diff. | K. | $l_1+K(l_2-l_1)$ |
|---|---|---|---|
| 82,0 | | | |
| | 60,4 | 0,526 | 50,4 |
| 21,6 | | | |
| | 54,4 | 0,530 | 50,6 |
| 76,0 | | | |
| | 48,2 | 0,519 | |
| 27,8 | | | |
| | 44,7 | | |
| 72,5 | | | |

Collimation 10′,4. Moyenne de K = 0,525. $f = \pi r \log \frac{K}{1-K} = 0,059$

*Troisième expérience.* $r$ = 0,229 :

| Lect. | Diff. | K. |
|---|---|---|
| 8,7 | | |
| | 78,6 | 0,517 |
| 87,3 | | |
| | 73,5 | 0,513 |
| 13,8 | | |
| | 69,6 | 0,523 |
| 83,5 | | |
| | 63,5 | 0,521 |
| 20,0 | | |
| | 58,3 | 0,521 |
| 78,3 | | |
| | 58,6 | |
| 26,7 | | |

Collimation 8′,5. Moyenne de 0. K = 0,520. $f = \pi r \log \frac{K}{1-K} = 0,059.$

*Quatrième expérience.* T = 0,274, $r$ = 0,273 :

Collimation 7',6. Moyenne de K = 0,519, $f = \pi r \log \frac{K}{1-K} = 0,0066$.

On voit que les valeurs de $f$ calculées sont sensiblement égales.

Opérons avec une pointe plus arrondie reposant alternativement sur deux godets différents.

*Pointe fortement arrondie.*

*Première expérience.* Godet sphérique de $3^{mm},4$. $T = 0^s,375$, $r = 0,143$ :

| Heures. | Diff. | Lect. | Diff. | K. | $l_1+K(l_2-l_1)$ | $-\frac{\dot n}{n}$. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $3^h$ $57^m$ $20^s$ | $44^s$ | 89,0 | 66,5 | 0,575 | 50,7 | |
| 58 04 | 38 | 22,5 | 49,1 | 0,571 | 50,5 | |
| 58 42 | 31 | 71,6 | 36,9 | 0,588 | moy. 50,6 | 0,0041 |
| 59 13 | 30 | 34,7 | 25,8 | 0,588 | | 0,0030 |
| 59 43 | 27 | 60,5 | 18,1 | 0,585 | | 0,0030 |
| $4^h$ 00 10 | 24 | 42,4 | 12,8 | 0,580 | | 0,0037 |
| 00 34 | 23 | 55,2 | 9,2 | 0,582 | | |
| 00 57 | 23 | 46,0 | 6,6 | | | |
| 01 20 | | 52,6 | | | | |

Collimation 12'.1. Moyenne de $-\frac{\dot n}{n} = 0.0034$. Moyenne de K = 0,581. $f = 0,0147$

*Deuxième expérience.* Godet sphérique de $1^{mm},2$. $T = 0^s,45$. $r = 0^{cm},099$ :

| Heures. | Diff. | Lect. | Diff. | K. | $l_1+K(l_2-l_1)$ | $-\frac{\dot n}{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $5^h$ $42^m$ $53^s$ | $58^s$ | — 18,2 | 105,1 | 0,642 | 49,3 | |
| 43 51 | 47 | 86,9 | 58,6 | 0,615 | 50,9 | |
| 44 38 | 39 | 28,5 | 36,7 | 0,615 | moy. 50,1 | 0,0039 |
| 45 17 | 35 | 65,0 | 23,0 | 0,614 | | 0'0034 |
| 45 52 | 31 | 42,0 | 12,3 | | | |
| 46 23 | | 54,8 | | | | |

Collimation 10',6 Moyenne de $-\frac{\dot n}{n} = 0,0036$. Moyenne de K = 0,622. $f = 0,0147$

La valeur de $f$ est beaucoup plus forte. L'effet de l'épaisseur de la pointe est manifeste.

Opérons encore sur une pointe très fortement arrondie.

*Pointe très fortement émoussée (presque plate),*

*Première expérience.* T = 0ˢ,461, $r$ = 0ᶜᵐ,093 :

| Lect. | | K. | |
|---|---|---|---|
| 88,5 | 55,6 | 0,670 | 51,2 |
| 32,9 | 25,0 | 0,677 | 49,8 |
| 57,9 | 10,9 | | |
| 47,0 | | | |

Collimation 9,5. Moyenne de K = 0,673, $f = \pi r \log \frac{K}{1-K} = 0{,}0214$.

*Deuxième expérience.* $r$ = 0ᶜᵐ,137 :

| Heures. | Diff. | Lect. | Diff. | K. | $l_1 + K(l_2 - l_1)$ | $-\frac{\dot{n}}{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3ʰ 50ᵐ 44ˢ | 40ˢ | 8,5 | 65,8 | 0,633 | 50,5 | |
| 51 24 | 36 | 74,3 | 37,4 | 0,625 | 50,9 | |
| 52 00 | 31 | 36,9 | 22,4 | 0,636 | | 0,0035 |
| 52 31 | 29 | 59,3 | 12,8 | 0,621 | | 0,0029 |
| 53 00 | 27 | 46,5 | 7,8 | | | |
| 53 27 | | 54,3 | | | | |

Collimation 11′. Moyenne de $-\frac{\dot{n}}{n} = 0{,}0032$.

Valeur moyenne de K = 0,630. $f\ \pi r \log \frac{K}{1-K} = 0{,}0225$.

*Troisième expérience.* T = 0,334, $r$ = 0ᶜᵐ,181 :

| Heures. | Diff. | Lect. | Diff. | K. | $l_1 + K(l_2 - l_1)$ | $-\frac{\dot{n}}{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4ʰ 50ᵐ 57ˢ | 26ˢ | 101,5 | 86,6 | 0,590 | 50,4 | |
| 51 23 | 23 | 14,9 | 60,1 | 0,597 | 50,8 | |
| 51 46 | 23 | 75,0 | 40,5 | 0,587 | | 0,0026 |
| 52 09 | 21 | 34,5 | 28,5 | 0,590 | | 0,0039 |
| 52 30 | 18 | 63,0 | 19,8 | | | |
| 52 48 | | 43,2 | | | | |

Collimation 9′,9. Moyenne de $-\frac{\dot{n}}{n} = 0{,}032$.

Moyenne de K = 0,591. $f = \pi r \log \frac{K}{1-K} = 0{,}0213$.

L'augmentation d'épaisseur de la pointe a donc produit un accroissement dans la valeur de $f$. On voit que cette valeur est encore sensiblement la même pour toutes ces expériences.

On peut donc conclure que $f$ ne varie qu'avec l'état du pivot. Si $r$ était très grand relativement à l'épaisseur de la pointe, l'effet de l'usure serait moins sensible sur le coefficient K. Il est donc avantageux que $r$ soit aussi grand que le permettent les circonstances.

Le coefficient $f$ doit être, d'après sa signification, indépendant du poids de la toupie. En faisant varier son poids de 40 grammes, j'ai constaté, en effet, que le redressement n'en était pas sensiblement affecté.

Examinons maintenant le nombre intitulé $\frac{\dot{n}}{n}$ qui représente approximativement, comme on va le voir, le taux du ralentissement de la rotation $n$. On a pu remarquer que dans les observations précédentes sa valeur reste la même quelle que soit l'acuité de la pointe; ce fait, confirmé par de nombreuses observations, indique que le frottement de la pointe, représenté par le couple $mgf_1$ (3), est à peu près négligeable auprès du couple F provenant de la résistance de l'air, à laquelle il faut attribuer presque exclusivement l'effet retardateur. Cette résistance est due principalement, sans doute, à la présence des augets. Si on la suppose proportionnelle à la vitesse linéaire des points du contour extérieur, le couple F est représenté par $CR^2n$, R étant le plus grand rayon de la toupie, et C un coefficient variable avec le nombre et la profondeur des augets. L'équation (3) donnerait donc, en y négligeant le couple $mgf_1$,

$$\frac{\dot{n}}{n} = -\frac{cR^2}{A} \quad \text{et} \quad n = n_0 e^{-\frac{cR^2}{A}t},$$

$n_0$ désignant la vitesse de rotation à l'instant initial.

On a, par conséquent,

$$\dot{\psi}_1 = \frac{mgr}{An_0} e^{\frac{cR^2}{A}t}$$

La durée, $t_1$, du premier tour de précession est donnée par la relation

$$2\pi = \frac{mgr}{An_0} \int_0^t e^{\frac{cR^2}{A}t}\, dt = \frac{mgr}{cR^2 n}\left(e^{\frac{cR^2}{A}t_1} - 1\right), \quad . \quad . \quad (19)$$

et celle du second tour, $t_2$, par

$$4\pi = \frac{mgr}{cR_2 n_0}\left(e^{\frac{cR^2}{A}(t_1+t_2)} - 1\right)$$

On a donc entre ces deux durées la relation

$$2e^{\frac{cR_2}{A}t_1} = e^{\frac{cR_2}{A}(t_1+t_2)} + 1$$

indépendante de $n_0$, et applicable, par suite, à deux tours de précession successifs quelconques.

Développant les exponentielles, on obtient

$$\frac{cR^2}{A} = \frac{2(t_1 - t_2)}{(t_1+t_2)^2 - 2t_1^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{cR^2}{A}\right)^2 \frac{2t_1^3 - (t_1+t_2)^3}{(t_1+t_2)^2 - 2t_1^2} + \cdots$$

Si l'on s'arrête au premier terme, on a

$$\frac{cR^2}{A} = \frac{2(t_1-t_2)}{(t_1+t_2)^2} \frac{1}{1 - 2\left(\frac{t_1}{t_1+t_2}\right)^2}.$$

Comme $t_1$ et $t_2$ diffèrent assez peu, $\frac{t_1}{t_1+t_2}$ est à peu près égal à $^1/_2$ et on a la relation approximative

$$\frac{cR^2}{A} = \frac{4(t_1-t_2)}{(t_1+t_2)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Le nombre intitulé $-\frac{\dot{n}}{n}$ est le résultat de cette formule. Il serait, je pense, inutile de chercher une plus grande précision, car les heures des maxima et des minima, assez difficiles à apprécier, surtout lorsque les inclinaisons sont faibles, ne sont exactes qu'à deux ou trois secondes près. Du reste, ce nombre n'a aucune importance pratique en ce qui concerne la méthode d'observation; il n'est donné qu'à titre de renseignement. Sa constance tend cependant à prouver que l'hypothèse proposée sur la résistance de l'air est acceptable. Pour la vérifier, j'ai fait varier le moment d'inertie A en logeant dans le creux des augets des morceaux de plomb qui, tout en augmentant A, ne pouvaient avoir d'influence bien sensible sur la résistance de l'air.



J'ai trouvé ainsi que le produit $A\frac{\dot{n}}{n}$ était sensiblement constant. Voici quelques résultats :

| Moment d'inertie A | Valeur observée de $\frac{\dot{n}}{n}$ | Produit — $10^4 A \frac{\dot{n}}{n}$ |
|---|---|---|
| 0,693 | 0,0026 | 18,06 |
| 0,648 | 0,0032 | 20,74 |
| 0,578 | 0,0035 | 20,23 |

On a pu remarquer quelques divergences dans les collimations données par les expériences précédentes. Elles peuvent être attribuées en partie à des effets de mirage très fréquents dans l'estuaire du fleuve de *La Plata,* sur l'horizon duquel elles ont été prises. Mais il s'en présente de beaucoup plus fortes qui peuvent atteindre jusqu'à 10′. Elles surviennent brusquement après une assez longue suite de très bons résultats, obtenus avec la même pointe, sans qu'aucune cause extérieure, tel qu'un faux mouvement ou une brusque secousse, puisse les expliquer; et même la série des tops, qui donne cette anomalie, peut ne présenter aucune irrégularité suspecte(*). Si l'on examine alors la pointe avec une forte loupe, on la trouve généralement terminée par un petit cercle plat à bords tranchants, quelquefois garnis d'aspérités; c'est là, sans doute, la cause perturbatrice. On peut prévoir *a priori* qu'elle aura moins d'effet si $r$ est grand. Car les couples produits autour du point O par la non-acuité de sa pointe peuvent, quels qu'ils soient, se décomposer suivant les trois directions perpendiculaires $\rho$, $V\alpha\rho$, $V\rho V\alpha\rho$, et donner, autour d'elles, des moments $mgf_1$, $mgf_2 \sin\theta$, $mgf \sin\theta$, les quantités $f_1$, $f_2$, et $f$ étant, du reste, quelconques. L'équation (8) deviendra, en supposant l'accélération du pivot négligeable,

$$\rho_1 = \frac{mgr}{An}\left(1 + \frac{f_1}{r}\right) V\alpha\rho_1 + \frac{mgf}{An} V\rho_1 V\alpha\rho_1;$$

d'où

$$\dot{\psi}_1 = \frac{mgr}{An}\left(1 + \frac{f_1}{r}\right), \quad -\frac{\dot{\theta}_1}{\sin\theta_1} = \frac{mgf}{An}$$

(*) Voir la note relative à l'effet de la rotation terrestre dont il n'a pas été tenu compte dans les observations précédentes.



Or, le couple en $f_2$ sera toujours très petit relativement à celui de la pesanteur, et $\psi_1$ conservera sensiblement sa valeur régulière $\frac{mgr}{An}$. On aura donc encore

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\dot{\psi}_1 \sin\theta_1} = -\frac{f}{r}.$$

On voit d'après cette formule que si $f$ subit une variation, l'angle de la courbe décrite par l'extrémité de l'axe avec les méridiens verticaux qu'elle rencontre, en sera d'autant moins affecté que $r$ sera grand. Il est donc avantageux d'augmenter $r$ le plus possible.

Supposons, pour fixer les idées, que la présence du petit cercle nécessite, comme il a été dit en commençant, le changement du couple $mgf\mathrm{V}\rho\mathrm{V}\alpha\rho$ en $mgf\mathrm{V}\rho\mathrm{V}\lambda\rho$, $\lambda$ étant un vecteur unitaire dirigé suivant la normale au point de contact. On a

$$\dot{\rho}_1 = \frac{mgr}{An}\mathrm{V}\alpha\rho_1 + \frac{mgf}{An}\mathrm{V}\rho_1\mathrm{V}\lambda\rho_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8')$$

Considérons le vecteur unitaire $\xi$ satisfaisant à la condition

$$r\mathrm{V}\alpha\xi + f\mathrm{V}\xi\mathrm{V}\lambda\xi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

qui représenterait, si $\lambda$ était fixe, une position d'équilibre du vecteur $\rho$. Connaissant $\lambda$ et $\alpha$, il est facile de déterminer $\xi$. Soient OA, OL, OS les vecteurs unitaires $\alpha$, $\lambda$, $\xi$. Posons l'angle LOA $= i$, LOS $= j$, AOS $= s$, l'angle $i$ ne dépassant pas 3° ou 4°. L'équation (21) montre que le dièdre formé par les plans AOS et LOS, dont OS est l'arête, est rectangle, car si l'on opère par $\mathrm{S}(\mathrm{V}\alpha\xi)\times$, il vient

$$\mathrm{SV}\alpha\xi\,.\,\mathrm{V}\alpha\xi = 0.$$

Donc, le triangle sphérique LSA étant rectangle, on a

$$\cos i = \cos j \cos s.$$

De plus, les tenseurs des vecteurs $\mathrm{V}\alpha\xi$ et $\mathrm{V}\xi\mathrm{V}\lambda\xi$ doivent satisfaire à la relation

$$r\sin s = f\sin j.$$

Comme $f$ est petit relativement à $r$, tous ces angles sont petits, et on a, à des termes près de second ordre,

$$\sin s = \frac{f \sin i}{\sqrt{r^2 + f^2}}, \quad \sin j = \frac{r \sin i}{\sqrt{r^2 + f^2}}.$$

L'angle dièdre dont OA est l'arête a pour sinus

$$\frac{\sin j}{\sin i} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + f^2}};$$

il est donc à peu près droit. L'équation vectorielle (21) indique, du reste, la position relative des trois vecteurs.

Opérons sur (8′) par $S\xi . \times$, sur (21) par $\frac{mg}{An} S\rho \times$, puis retranchons membre à membre, il vient

$$S\xi\dot{\rho} = \frac{mgf}{An}(1 + S\xi\rho) S\lambda(\rho + \xi).$$

Opérons encore sur (8′) par $S(V\xi\rho)\times$, sur (21) par $\frac{mg}{An} S(V\xi\rho)\times$ et retranchons, on a

$$S\dot{\rho}\xi\rho = \frac{mgr}{An}(1 + S\xi\rho) S\alpha(\rho + \xi).$$

Supposons pour un moment que $\lambda$ soit fixe et désignons par $\theta_2$ l'inclinaison de $\rho$ sur le vecteur $\xi$, et par $\psi_2$ un angle de précession compté, à partir d'un plan fixe quelconque passant par $\xi$, dans le sens $V\xi\rho$. On a

$$\frac{S\xi\dot{\rho}}{S\dot{\rho}\xi\rho} = -\frac{\dot{\theta}_2}{\sin\theta_2 . \dot{\psi}_2} = \frac{f}{r}\frac{S\lambda(\rho + \xi)}{S\alpha(\rho + \xi)}.$$

Or

$$\frac{S\lambda(\rho + \xi)}{S\alpha(\rho + \xi)} = \frac{S\lambda\left(\frac{\rho + \xi}{2}\right)}{S\alpha\left(\frac{\rho + \xi}{2}\right)},$$

et $\frac{\rho + \xi}{2}$ représente en grandeur et direction la hauteur du triangle isocèle formé par les vecteurs $\rho$ et $\xi$. Comme ce vecteur s'écarte

peu de la verticale, chacun des termes du rapport précédent sera à peu près égal à — 1. On aura donc, à peu près,

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\sin'\theta_2.\dot{\psi}^2} = -\frac{f}{r}.$$

Si $f$ est constant, on voit que l'axe du gyroscope tend à décrire une loxodromie autour du vecteur $\xi$.

Si $\lambda$ oscille autour d'une position moyenne $\bar{\lambda}$, ou, ce qui revient au même, si l'extrémité, L, de $\lambda$, oscille autour d'un point $\bar{L}$, le point S, extrémité de $\xi$, décrira une courbe à peu près semblable à celle que décrit le point L. Car les deux courbes seront à peu près planes et contenues dans le plan horizontal passant par A, et l'angle dièdre dont l'arête est en A restant à peu près droit, les vecteurs issus du point A de ces courbes seront à peu près perpendiculaires entre eux et leurs longueurs seront dans le rapport $\frac{\sin S}{\sin i} = \frac{f}{\sqrt{r^2+f^2}}$. A la position moyenne $\bar{\lambda}$ (ou $\bar{L}$) inclinée sur la verticale de l'angle $\bar{i}$, correspondra *un point moyen* $\bar{S}$ et une direction moyenne $\bar{\xi}$ du vecteur $\xi$, faisant avec la verticale de l'angle $\bar{s}$, ces deux angles satisfaisant à la relation

$$\sin\bar{s} = \frac{f}{\sqrt{r^2+f^2}}\sin\bar{i}.$$

On voit, d'après (22) et (23), que le point $\bar{S}$ doit être considéré comme le pôle de la spirale décrite par l'axe du gyroscope. La méthode des maxima et des minima va donner l'inclinaison de l'astre observé, non pas sur un plan horizontal, mais sur un plan perpendiculaire au vecteur $\bar{\xi}$.

Si la direction moyenne de la normale $\lambda$ est verticale ou parallèle au plan du sextant, $\bar{\xi}$ sera ou vertical ou situé dans un plan parallèle à celui du limbe, et l'erreur sera nulle ou faible. Mais si la direction moyenne de la normale est contenue dans un plan vertical perpendiculaire au plan du limbe, $\bar{\xi}$ sera parallèle au plan du limbe et il en pourra résulter une erreur

$$\bar{s} = \frac{f}{\sqrt{r^2+f^2}}\bar{i}.$$

Pour $f = 0{,}008$, $r = 0{,}1$ et $i = 3^\circ$, l'erreur serait 11'.

Quoi qu'il en soit de cette explication, il est certainement avantageux de rendre $f$ aussi petit que possible, ce qui indiquerait tout d'abord l'emploi des pointes aiguës. Malheureusement ces pivots s'émoussent assez vite et ils peuvent détériorer le godet. Il reste donc l'augmentation de $r$. Mais, comme on l'a vu précédemment, il faut, pour que la toupie résiste aux mouvements du navire, que $\frac{mr}{An}$, et, par suite, que la vitesse de précession $\frac{mgr}{An}$, soient petits. D'autre part, si la précession est trop lente, il y a plus de chance pour qu'un nuage vienne obscurcir l'astre entre deux tops et faire manquer l'observation dont la durée trop prolongée fatiguerait du reste l'observateur. La durée de deux minutes pour le premier tour à précession parait la meilleure. Si cette durée est adoptée en principe, il faut que la condition

$$2\pi = \frac{mgr}{cR^2 n_0}\left(e^{\frac{cR^2}{A}120} - 1\right)$$

étant satisfaite, $r$ soit le plus grand possible. Je pense que dans les limites entre lesquelles la toupie pourrait être modifiée, la vitesse linéaire initiale, $Rn_0$, des points du contour peut être considérée comme constante (en supposant, bien entendu, que le même courant d'air moteur soit employé), et aussi le produit $cRn_0$. D'autre part $120\,\frac{cR^2}{A}$ étant assez petit, on peut négliger son carré, et l'expression précédente peut s'écrire

$$2\pi = \frac{g}{cRn_0} \cdot 120\,e \cdot \frac{mR}{A} \cdot r$$

Il s'agit de rendre $\frac{mR}{A}$ minimum, ce qui conduit à adopter pour la toupie la forme d'un anneau cylindrique ayant le plus grand rayon extérieur que permet la place disponible.

D'autre part, pour que la rotation se conserve il faut que $-\frac{\dot{n}}{n} = \frac{eA^2}{A}$ soit petit. La toupie lourde est donc avantageuse à ce point de vue, mais son poids ne pourrait pas dépasser une certaine limite sans que le pivot soit promptement détérioré. J'ai pu conserver assez longtemps un pivot supportant la toupie surchargée de morceaux de plomb et pesant 196 grammes. J'estime qu'un poids de 250 grammes pourrait être essayé avec chances de succès.



Le poids maximum de la toupie étant adopté et son plus grand rayon déterminé par la place disponible, il faudrait déterminer les autres dimensions de telle sorte que la durée du premier tour de précession étant de deux minutes, la valeur de $r$ fût le triple de la valeur actuelle, c'est-à-dire à peu près $0^{cm},3$. Je pense que les divergences de 10′ souvent constatées seraient ainsi divisées par trois et réduites à 3′, approximation bien suffisante pour les besoins ordinaires de la navigation.

Je verrais encore à la toupie lourde un autre avantage. Les pressions horizontales du pivot sur le godet étant proportionnelles au poids, le pivot de cette toupie sera moins dévié de sa course naturelle par la rencontre de quelque corps étranger ou aspérité du godet.

J'examine maintenant par l'expérience l'effet d'un défaut de centrage, défaut que je ne puis produire artificiellement qu'en fixant sur la toupie un poids, en dehors de l'axe. On prévoit que l'axe instantané de rotation de la toupie déséquilibrée se confondra, en apparence, comme tout à l'heure, avec l'axe principal d'inertie passant par le nouveau centre de gravité. La preuve expérimentale donnée précédemment est ici renouvelée dans des conditions différentes de poids et d'inertie.

La toupie lestée de huit morceaux de plomb fixés dans le creux des augets pèse 179 grammes. Un petit poids additionnel de $0^{gr},367$, déterminé par le calcul, placé sur la partie plane, ramène à sa position normale le repère que quelque inégalité des morceaux de plomb avait dévié de 8′.

Les choses étant ainsi, je détermine $\frac{B_1}{m}$ par les durées d'oscillation pendulaire correspondant aux valeurs du bras de levier, $r_0 - h$, $r_0$ et $r_0 + h$, $r_0$ désignant la valeur actuelle de $r$, et $h$ la longueur du pas de vis du pivot $0^{cm},044$. La moyenne de ces oscillations doubles donne pour la durée T, de l'oscillation simple,

pour

$$r_0 - h, \quad T = 0^s{,}520$$
$$r_0, \quad T = 0^s{,}417$$
$$r_0 + h, \quad T = 0^s{,}360$$



L'équation

$$T = \pi \sqrt{\frac{r + \frac{B_1}{mr}}{g}}$$

donne :

$r_0 = 0^{cm},124$, Erreur probable $\pm 0,0015$

$\frac{B_1}{m} = 2^{cm},17$, » » $\pm 0,01$

$B_1 = 0^{cm},397$, » » $\pm 0,002$

Pour avoir A je fais osciller sur le petit plateau, la toupie posée de deux façons différentes : d'abord l'axe vertical et ensuite l'axe horizontal. Je trouve

Pour l'axe vertical, durée d'oscillation. . . . $0^s,723$
Pour l'axe horizontal, » » . . . . . $0^s,540$

d'où

$$\frac{A}{B_1} = \left(\frac{0,723}{0,540}\right)^2 = 1,793.\ A = 0,712 \ (^*)$$

---

(*) Le principe repose sur la considération suivante. Soit H l'angle que fait, à une phase quelconque de l'oscillation, le plan vertical passant par un diamètre arbitrairement choisi du petit plateau circulaire avec le plan vertical passant par le même diamètre lorsque l'appareil est au repos. Les forces mises en jeu, dépendant du poids et de H, sont égales dans les deux cas, pour une même valeur de cette variable ; il en est de même de l'énergie potentielle. D'autre part, les fils étant très longs relativement à leur écartement, le mouvement en hauteur est négligeable et l'énergie actuelle est due tout entière à la vitesse angulaire $\dot{H}$. L'appareil étant, dans les deux cas, abandonné à lui-même après avoir subi le même écart $H_0$, atteindra une position extrême — $H'_0$, puis reviendra à la position primitive, et ainsi de suite, puisque, par hypothèse, le milieu ambiant n'absorbe pas d'énergie. Soient, pour une même valeur de H,

$\dot{H}_1$ la vitesse angulaire de la toupie, l'axe étant vertical ;

$\dot{H}_2$ la vitesse angulaire de la toupie, l'axe étant horizontal,

et F(H) l'énergie potentielle. Écrivons que l'énergie totale est constante. On a

axe vertical. . . . $\frac{1}{2}(A + a)\dot{H}_1^2 + F(H) = F(H_0)$,

axe horizontal. . . $\frac{1}{2}(B_1 + a)\dot{H}_2^2 + F(H) = F(H_0)$,

A désignant le mouvement d'inertie du plateau et des fils.

Donc

$$\frac{\dot{H}_1}{\dot{H}_2} = \left(\frac{B_1 + a}{A + a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Or l'arc $H_0 + H_0'$, qui est le même pour les deux positions, étant décrit avec des vitesses inversement proportionnelles à $(A + a)^{\frac{1}{2}}$ et à $(B_1 + a)^{\frac{1}{2}}$, les temps qu'il faudra pour le

On sait qu'un poids excentrique, $m'$, assez petit pour être réduit à son centre de gravité, situé à une hauteur, $h$, au-dessus du centre de gravité de la toupie et à une distance $l$ de l'axe de symétrie, donne à l'axe principal passant par le nouveau centre de gravité une inclinaison, $i$, sur l'axe de symétrie, donnée par la formule

$$\mathrm{tg}\, 2i = \frac{\frac{mm'}{m+m'} . lh}{A - B + \frac{mm'}{m+m'}(l^2 - h^2)} .$$

Je fixe sous le chapeau et dans le plan diamétral passant par le centre des lentilles un poids de $1^{gr},96$ dont la position est $h = 1^{cm},1$, $l = 1,0$. L'angle, $i$, calculé est de 20'. La toupie tournant autour de cet axe, l'image du trait unique doit-être dévié de 40'; je constate en effet que cette image se superpose à celle du $4^{me}$ trait secondaire à partir du trait central.

Un poids de 1 gramme, placé sur le chapeau dans la position $h = 2,26$, $l = 0,6$, donne, par le calcul, $i = 15'$. Le repère est effectivement dévié a très peu près du double de cet angle.

Les moments d'inertie étant différents, $A = 0,648$, $B = 0,38$

---

décrire, c'est-à-dire les durées d'oscillation, auront leur carré dans le rapport $\frac{A+a}{B_1+a}$, à très peu près égal à $\frac{A}{B_1}$, si $a$ est petit.

J'avais proposé d'abord l'emploi d'un disque de même poids que la toupie, mais l'égalité rigoureuse des poids étant d'une réalisation difficile, ce procédé donne de mauvais résultats. Je préfère la méthode précédente qui exige cependant que le centre de gravité soit placé, dans les deux cas, sur la même verticale passant, autant que possible, au milieu des fils Pour bien centrer, sur ce plateau, la toupie posée horizontalement, il est bon de tracer d'avance sur son contour un repère indiquant la hauteur du centre de gravité, ce qui est facile puisque $r_0$ est connu.

J'ai essayé de mesurer l'inégalité produite dans les moments d'inertie $B_1$ par la présence des lentilles en plaçant horizontalement, puis verticalement, le diamètre sur lequel elles sont fixées; je n'ai pas obtenu de différence marquée dans les durées d'oscillation.

Voici du reste la vérification expérimentale des principes. Je fais osciller de la même façon un disque massif en cuivre dont les dimensions sont: rayon = $2^{cm},35$, hauteur = $1^{cm},16$ et dont les moments d'inertie sont par conséquent dans le rapport 1,85. Les durées d'oscillation sont

| | |
|---|---|
| Pour le disque posé à plat. . . . . . . . . . | $0^s,702$ |
| Pour le disque posé sur la tranche. . . . . . . | $0^s,513$ |

Le rapport des carrés de ces nombres est 1.87. La petite divergence tient probablement à quelque défaut de centrage.



un poids de 1$^{gr}$,6 dont la position est $h = 0{,}9$ donne $i = 16'9$ calculé. On observe que le trait unique est dévié de 33'. Le calcul et l'observation s'accordent donc dans tous les exemples cités.

En prenant le contact sur l'image du trait unique ainsi déviée, on peut suivre les mouvements de l'axe principal d'inertie comme on suit, dans les conditions ordinaires, ceux de l'axe de figure. Prenons pour exemple le cas de la dernière expérience. Puisque l'axe d'inertie fait un angle de 16',9 avec la normale du plan indiqué par le nouveau repère (constitué par l'image du trait unique coïncidant avec un trait fictif qui serait écarté de 33' du trait central), il suffit, pour avoir l'inclinaison de l'objet observé sur le plan perpendiculaire à cet axe, d'ajouter 16',9, c'est-à-dire 5,8 divisions de la vis micrométrique, à chaque lecture. En opérant ensuite comme à l'ordinaire, on doit retrouver la même collimation. Dans le cas actuel il faut ajouter la correction parce que l'image du trait unique est diviée du côté positif du micromètre optique; il faudrait la retrancher si la déviation était de sens contraire. Il est clair que le coefficient K ne dépendant que de la différence des lectures n'est pas affecté par cette correction; on peut l'appliquer seulement au résultat final. Voici une série observée dans les conditions ci-dessus.

*Observation de l'horizon de la mer.*

Poids de 1$^{gr}$,6 placé du côté de la lentille à traits multiples; le trait unique est dévié de 33'

$A = 0{,}648$, $B = 0{,}38$, $r = 0^{cm}{,}094$ (avant la mise en place du poids).

| Heures. | Diff. | Lect. | Diff. | K. | $(l_1 + K(l_2 - l_1)$ | $-\frac{\dot{n}}{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4$^h$45$^m$ 17$^s$ | 53$^s$ | 91,6 | 80,6 | 0,598 | 43,4 | |
| 46 10 | 48 | 11,0 | 54,1 | 0,580 | 42,4 | |
| 46 58 | 40 | 65,1 | 39,1 | 0,579 | 42,5 | 0,0035 |
| 47 38 | 34 | 26,0 | 28,5 | 0,583 | moy. 42,8 | 0,0033 |
| 48 12 | 34 | 54,5 | 20,4 | 0,583 | | 0,0031 |
| 48 46 | 6 | 34,1 | 14,6 | 0,570 | | 0,0048 |
| 49 12 | 25 | 48,7 | 11,0 | 0,583 | | 0,0037 |
| 49 37 | 24 | 37,7 | 7,9 | | | |
| 50 01 | | 45,6 | | | | |



La division 42,8 donne au sextant — 8′,7
Correction à ajouter 16′,9

8′,2
Dépression 5′,0 Collimation 13′,2

Valeur moyenne de K = 0,582.
Valeur moyenne de $-\frac{\dot{n}}{n} = 0{,}0037$.

La toupie équilibrée donne une collimation de 15′ et des moyennes à peu près égales aux précédentes pour K et $-\frac{\dot{n}}{n}$. La constance des valeurs de K de la série précédente montre que l'axe principal d'inertie de la toupie désquilibrée décrit encore une loxodromie ; mais $-\frac{\dot{n}}{n}$ est sensiblement plus fort que pour la toupie équilibrée pour laquelle ce rapport est 0,0030.

Le même poids de 1gr,6 placé dans le creux de l'auget situé sous l'une des lentilles, son centre de gravité étant à peu près à la hauteur de celui de la toupie, ne produit qu'une très petite déviation due à ce que *h* n'est pas rigoureusement nul. J'ai observé dans ces conditions la série suivante dans laquelle les lectures ne sont exactes qu'au chiffre des unités près. Cette inexactitude qui provient de la position défectueuse du repère n'empêche pas cependant de constater l'effet produit par ce genre de lestage.

*Observation de l'horizon de la mer.*

$A = 0{,}648, \quad B_1 = 0{,}58, \quad r = 0{,}09.$

Placé un poids de 1gr,6 dans le creux de l'auget situé au dessous d'une des lentilles.

| Heures. | Diff. | Lect. | Diff. | K. | $(l_1+K(l_2-l_1))$ | $-\frac{\dot{n}}{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h 12m 23s | | 98,7 | | | | |
| | 47s | | 93,1 | 0,509 | 51,3 | |
| 13 10 | | 5,6 | | | | |
| | 34 | | 89,9 | 0,517 | 52,1 | |
| 13 44 | | 95,5 | | | | |
| | 27 | | 84,1 | 0,520 | 51,8 | 0,0054 |
| 14 11 | | 11,4 | | | | |
| | 24 | | 77,6 | 0,512 | 51,1 | 0,0071 |
| 14 35 | | 89,0 | | | | |
| | 18 | | 73,9 | | moy. 51,5 | |
| 14 53 | | 15,1 | | | | |

La graduation 51,5 de la vis donne au sextant 16′,2.
Dépression 5′,0

Collimation 21′,2

Moyenne de K = 0,517. Moyenne de $-\frac{\dot{n}}{n} = 0{,}0062$.

Le redressement est presque insensible et la rotation diminue beaucoup plus vite. En opérant avec un poids plus fort, on produirait des effets plus marqués, mais il se produit alors des vibrations très violentes qui sont dangereuses pour le pivot.

Les effets produits par le poids excentrique doivent être d'autant plus accentués que l'axe d'inertie passant par le centre de gravité de la toupie déséquilibrée est plus éloigné du pivot; c'est pourquoi le redressement et la rotation sont plus fortement diminués dans la dernière expérience que dans la première. Soit OO′ la perpendiculaire abaissée du pivot, O, sur l'axe d'inertie, les effets s'expliqueraient par un couple ayant son axe vertical et qui serait produit, autour du point O′, par les forces qui s'opposent à la rotation du pivot autour de ce point.

Après avoir démonté les parois et le fond de la boîte cylindrique, les séries que j'ai obtenues en observant la toupie tournant ainsi à l'air libre donnent les mêmes valeurs de K et des valeurs sensiblement plus fortes pour $-\frac{\dot{n}}{n}$. Ceci indique que la résistance de l'air n'a d'effet sensible que sur la rotation.

Enfin le poids de la toupie que j'ai pu faire varier entre 157 grammes et 220 grammes ne paraît pas avoir d'influence sur le coefficient K.

Je résume ainsi la conclusion de ce travail :

Si l'on imagine une sphère décrite de l'extrémité du pivot comme centre, et sur cette sphère des méridiens verticaux, l'axe de la toupie, prolongé au besoin, dessine sur cette sphère une loxodromie d'autant plus convergente vers le pôle que la pointe du pivot est plus épaisse et la distance du centre de gravité du pivot plus courte.

La tangente de l'angle constant que fait la courbe avec les méridiens qu'elle rencontre est, pour une même pointe, en raison inverse de la distance du centre de gravité au pivot; elle est indépendante du poids de la toupie.

La courbe qui serait ainsi tracée par l'axe ne doit pas être considérée comme une ligne mathématique; elle aurait une épaisseur égale à l'amplitude très petite du mouvement vibratoire très rapide qui accompagne le mouvement apparent.

Ces conclusions supposent le godet immobile. S'il y a du roulis, la courbe oscille autour de la loxodromie et, avec un peu d'habitude, on obtient encore de bonnes observations. Les perturbations les plus dangereuses, à mon avis, proviennent de l'usure de la pointe et de la rugosité du godet, et j'estime que pour les atténuer suffisamment, il faudrait que les dimensions de la toupie fussent telles que, la durée du premier tour de précession étant de deux minutes, la distance du centre de gravité au pivot fût de $3^{mm}$ environ.

On pourrait réaliser ces conditions, sans rien changer à l'état actuel, en se servant d'une soufflerie plus puissante. Mais en considérant que la rotation se conserve d'autant plus longtemps que le moment d'inertie autour de l'axe de figure est grand, je crois qu'il convient d'augmenter le poids de la toupie.

Indépendamment des considérations théoriques qui précèdent, l'expérience que j'ai pu acquérir par de nombreuses observations (mille environ) recueillies par mes officiers (*) et par moi-même, me fait croire que le nouveau modèle, agrandi, dont M. Fleuriais a bien voulu me communiquer les plans, donnera des résultats beaucoup plus exacts et certainement suffisants pour les besoins ordinaires de la navigation.

A bord du *Niger*, 18 février 1888.

---

(*) MM Coronne et Barillon.

# ADDITION

*Influence de la rotation de la terre sur les résultats donnés par le gyroscope collimateur.*

Les divergences à peu près constantes et toujours de même sens que présentaient plusieurs observations prises alternativement dans des azimuths opposés, m'ont conduit à examiner l'influence de la force centrifuge composée due à la rotation de la terre. Je l'avais considérée jusqu'ici comme négligeable, mais les calculs ainsi que les résultats pratiques suivants montrent qu'il est indispensable d'en tenir compte :

Soient

$p = \frac{2\pi}{24 \times 3600}$, la vitesse, par seconde, de la rotation terrestre ; $\lambda$, un vecteur unitaire parallèle à l'axe des pôles et dirigé vers le nord. La rotation $p$ est positive pour un observateur placé suivant ce vecteur.

Le mouvement est rapporté, comme précédemment, à un système d'axes invariablement liés à la terre et ayant leur origine au point O, extrémité du pivot considéré comme fixe.

Soit, dans ce système, $\mu$, le vecteur, issu du point O, d'un élément de masse, $\delta m$, du gyroscope, et $\dot{\mu}$, en grandeur et direction, la vitesse de cet élément. Il faut lui appliquer en outre de la pesanteur $g.\delta m$, la force apparente

$$2p\delta m \mathrm{V}\lambda\dot{\mu}$$

qui représente, en grandeur et direction, la force centrifuge composée. Cette force donne, autour du point O, un couple dont l'axe est, en grandeur et direction,

$$-2p\delta m \mathrm{V}\mu\mathrm{V}\lambda\dot{\mu} = -2p\delta m(\dot{\mu}\mathrm{S}\lambda\mu - \lambda\mathrm{S}\mu\dot{\mu}) = -2p\delta m\mathrm{S}\lambda\mu$$

(parce que la longueur du vecteur $\mu$ étant invariable $S\mu\dot{\mu}$ est nul).

Or le point O étant immobile (plus exactement, sa vitesse étant considérée comme négligeable), la vitesse apparente $\dot{\mu}$ n'est due qu'à la rotation apparente du gyroscope. L'axe de celle-ci est, en grandeur et direction,

$$(n - \dot{\psi}\cos\theta)\,\rho + V\dot{\rho}\rho.$$

on aura donc

$$\dot{\mu} = (n - \dot{\psi}\cos\theta)\,V\mu\rho + V\mu V\dot{\rho}\rho.$$

La vitesse angulaire, $\dot{\rho}$, de l'axe du gyroscope étant très petite relativement à $n$, on pourra ne conserver que le premier terme et écrire

$$\dot{\mu} = nV\mu\rho.$$

Le couple résultant de toutes les forces apparentes élémentaires est, par suite,

$$-\,2\,pn\,\Sigma\,\delta m S\lambda\mu\,.\,V\mu\rho.$$

Pour évaluer cette somme imaginons un plan passant par l'axe du gyroscope, $\rho$, et parallèle à la ligne des pôles, autrement dit, un plan contenant $\rho$ et $\lambda$; puis décomposons $\lambda$ et $\mu$ suivant $\rho$, suivant un vecteur unitaire, $\beta$, contenu dans ce plan et dirigé vers le nord, et suivant la direction $V\beta\rho$. Si L est l'inclinaison de l'axe des pôles sur le vecteur $\beta$, on aura

$$\lambda = -\,\rho\sin L + \beta\cos L.$$

Posons

$$\mu = x\rho + y\beta + zV\beta\rho,$$

$x$, $y$, et $z$ étant les coordonnées de la masse $\delta m$ dans le système trirectangulaire $\rho$, $\beta$ et $V\beta\rho$. On a

$$S\lambda\mu = x\sin L - y\cos L$$
$$V\mu\rho = yV\beta\rho - zV\rho V\beta\rho.$$

La somme cherchée est

$$\Sigma\delta m\,(x \sin L - y \cos L)\,(y\, V\beta\rho - zV\rho V\beta\rho).$$

La toupie étant un corps de révolution, les rectangles $\Sigma xz\delta m$, $\Sigma yz\delta m$, $\Sigma xy\delta m$, sont nuls, et la somme $\Sigma y^2\delta m$ est égale à la moitié du mouvement d'inertie, A, relatif à l'axe de figure. Le mouvement total se réduit donc à

$$pAn \cos LV\beta\rho = pAnV\lambda\rho$$

qu'il faudra ajouter au second membre de l'équation (1).

Si l'on suppose, pour plus de simplicité, que le pivot soit absolument aigu, l'équation du mouvement moyen devient

$$\dot{\rho} = \frac{mgr}{An} V\alpha\rho + pV\lambda\rho = \frac{mgr}{An} V \left(\alpha + \frac{pAn}{mgr}\lambda\right)\rho \quad . \quad . \quad (a)$$

Le vecteur $\alpha + \frac{pAn}{mgr}\lambda$, est la diagonale OA′, du parallélogramme construit sur le vecteur unitaire vertical $OA = \alpha$, et sur le très petit vecteur $ON = \frac{pAn}{mgr}\lambda$. Sa longueur diffère très peu de l'unité, et sa direction qui serait fixe, relativement à la terre, si $n$ était constant, s'écarte très peu, pendant la durée d'un tour de précession, d'une direction moyenne

$$\overline{OA'} = \alpha + p\frac{A\bar{n}}{mgr}\lambda;$$

nous allons voir que cet écart n'atteint pas 1′. On peut par suite admettre que, pendant un tour de précession, le vecteur OA′ se confond avec le vecteur constant $\overline{OA'}$. Dans ces conditions, l'équation ($a$) signifie que l'axe du gyroscope décrit un cône dont l'axe est OA′ (ce vecteur serait l'axe de la loxodromie, s'il s'agissait d'une pointe mousse), avec une vitesse de précession sensiblement égale à $\frac{mgr}{An}$. La valeur moyenne de cette vitesse s'obtient à l'aide de la durée du tour de préces-

sion, c'est-à-dire du nombre P, de secondes écoulées entre deux maxima ou deux minima consécutifs. On a

$$\frac{mgr}{A\bar{n}} = \frac{2\pi}{P}.$$

D'après cela, le vecteur OA′ serait sensiblement

$$\alpha + \frac{pP}{2\pi}\lambda = \alpha + \frac{P}{24.3600}\lambda.$$

L'angle AOA′ $= i$, qui représente l'écart de la verticale descendante et de l'axe du cône (ou de la loxodromie) que décrit l'axe de la toupie (plus exactement, que décrit le vecteur du centre de gravité) est donné par

$$\sin i = AA' \sin (NOA - i).$$

Or, NOA est le supplément de la colatitude, dans l'hémisphère nord, ou la colatitude dans l'hémisphère sud. On a donc, à très peu près

$$i = \frac{P \cos l}{24.360} \ (^*),$$

et en minutes de degré

$$i'' = \frac{P \cos l}{24 \times 3600 \times 0{,}00029} = \frac{P \cos l}{25{,}06}.$$

La durée du tour de précession étant généralement de 120 secondes, l'angle $i''$ atteindra 4′,8 sous l'équateur. Cette déviation a lieu du côté du nord, si la rotation $n$ se fait de droite à gauche pour l'observateur placé suivant le vecteur du *c. d. g* (la tête vers ce centre et les pieds vers le pivot); elle serait méridionale pour une rotation opposée.

On a vu précédemment que le rapport $-\frac{\bar{n}}{n}$ était sensiblement

(*) $l$, représentant la latitude du lieu d'observation



égal à 0,0035. Par conséquent, pendant un demi-tour de précession, c'est-à-dire pendant 60 secondes, le vecteur ON s'écartera de sa valeur moyenne $\frac{pA\bar{n}}{mgr}\lambda$ d'une quantité tout au plus égale en valeur absolue à

$$\frac{PA\bar{n}}{mgr}(1 - e^{\pm 0,0035 \times 60})$$

soit à peu près les 0,21 de sa valeur moyenne. Le vecteur OA' ne peut donc dévier que d'un angle 4',8 × 0,21, plus petit que 1'. On peut donc considérer ce vecteur comme fixe.

Il est clair que la méthode des maxima et minima va donner l'inclinaison de l'objet observé, non pas sur un plan horizontal, mais sur un plan perpendiculaire à OA'. Si l'azimuth d'observation est est ou ouest, il n'en résultera pas d'erreur sensible, puisque OA' est situé dans le plan méridien; mais si, en général, cet azimuth est $z$, compté de 0° à 180° à partir du nord, la hauteur observée sera trop faible d'un angle $i$ cos $z$. Par conséquent, les hauteurs méridiennes prises face au nord, seront toujours trop faibles, et les hauteurs prises face au sud, toujours trop fortes, Si l'on se sert de ces hauteurs pour déterminer la collimation (*), on trouvera une collimation trop faible avec les premières et trop forte avec les secondes. En voici la preuve expérimentale fournie par quelques hauteurs méridiennes observées entre les parallèles 45° nord et 23° sud. Les collimations obtenues sont :

Face au nord :

+ 2',3; — 2',7; 0; 0; 0; + 2',0; — 0',6. En moyenne + 0',2.

Face au sud :

+ 8',0; + 7',5; + 6',0; + 2',8; + 8',0; + 8',0 + 4',5 En moyenne + 6',4

(*) Je définis : collimation = hauteur observée — hauteur exacte.



Si à l'aide des durées de précession on corrige ces collimations de l'angle $i$, elles deviennent :

Face au nord :

+ 3',4; + 1',6; + 2',7; + 3',2; + 3',5; + 5',3 + 4',5. En moyenne + 3',4.

Face au sud :

+ 5',3; + 3',8; + 0',1; + 4',5; + 4',8; + 4',8; + 1',7. En moyenne + 3',3.

On voit que les corrections égalisent les moyennes primitivement assez divergentes. Mais ces divergences sont mieux accentuées dans les séries suivantes, observées, à dessein, le plus près possible de l'équateur (entre les latitudes 10° sud et 11° nord), où la force centrifuge composée se fait mieux sentir; elles sont prises sur l'horizon de la mer. Chacun des nombres de la première colonne est la moyenne des deux collimations données par deux tours de précession consécutifs, commençant, le premier par un maximun ou un minimum, le second par le minimum ou le maximum suivant : quatre tops en tout. La seconde colonne donne la moyenne des durées de ces deux tours, et la troisième, les collimations de la première colonne corrigées de l'angle (en minutes)

$$i' \cos z = \frac{P}{25} \cos l \cos z,$$

$l$ étant la latitude et $z$ l'azimuth compté à partir du nord, du point de l'horizon observé.

Ces observations ont été prises, du 1er au 7 août, à bord du *Niger*, tant par mes officiers (*) que par moi-même, dans des conditions diverses de roulis et de tangage, mais généralement par assez beau temps. Le gyroscope employé n'est pas celui qui a servi aux expériences précédemment citées dans ce mémoire ; il est, par suite, tout naturel que les collimations diffèrent des précédentes.

(*) MM. Coronne et Barillon, capitaines au long cours.

Lattitude = 0. $\cos l = 1$.

| Face au nord, $\cos z = +1$. Correction $= +\frac{P}{25}$. | | | Face au sud, $\cos z = -1$. Correction $= -\frac{P}{25}$. | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Collim. non corrigées. | Durée P. | Collim. corrigées. | Collim. non corrigées. | Durée P. | Collim. corrigées. |
| − 2',6 | 110sec | + 1',8 | + 9',0 | 131sec | + 3',8 |
| − 1',0 | 121 | + 3',8 | + 7',6 | 130 | + 2',4 |
| − 0',1 | 112 | + 4',4 | + 10',0 | 117 | + 5',4 |
| − 2',4 | 124 | + 2',5 | + 5',6 | 107 | + 1',4 |
| − 2',9 | 133 | + 2',4 | + 5',1 | 113 | + 0',6 |
| − 2',9 | 139 | + 2',7 | + 9',7 | 116 | + 5',1 |
| − 1',8 | 114 | + 2',8 | + 7',4 | 94 | + 3',6 |
| + 1',2 | 89 | + 4',8 | + 5',9 | 113 | + 1',4 |
| − 4',6 | 125 | + 0',4 | + 5',4 | 107 | + 1',1 |
| − 3',9 | 130 | + 1',2 | + 7',6 | 147 | + 1',7 |
| − 1',1 | 101 | + 3',0 | + 9',2 | 142 | + 3',5 |
| − 0',2 | 141 | + 5',4 | + 11',1 | 155 | + 4',9 |
| − 1',0 | 151 | + 5',0 | + 8',3 | 152 | + 2',2 |
| − 4',8 | 156 | + 1',4 | + 6',7 | 111 | + 2',3 |
| − 2',1 | 156 | + 4',1 | + 6',5 | 106 | + 2',7 |
| − 5',1 | 160 | + 1',3 | | | |
| − 0',1 | 109 | + 4',1 | | | |
| Moyenne − 2',1 | | + 3',0 | + 7',7 | | + 2',8 |

$\cos l = 0{,}9$.

| Face au nord-est ou au nord-ouest. $\cos z = +0.7$, corr. $= +\frac{P}{25} \times 0{,}63$ | | | Face au sud-est ou au sud-ouest. $\cos z = -0{,}7$, corr. $= -\frac{P}{25} \times 0{,}63$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| + 1',6 | 118sec | + 4',3 | + 8',5 | 102sec | + 5',7 |
| + 1',2 | 112 | + 4',0 | + 7',0 | 110 | + 4',2 |
| + 2',1 | 106 | + 4',8 | + 5',1 | 108 | + 2',3 |
| + 2',4 | 106 | + 5',0 | + 4',5 | 105 | + 1',9 |
| + 0',4 | 108 | + 3',1 | + 3',7 | 106 | + 1',1 |
| + 1',6 | 100 | + 4',1 | + 5',7 | 102 | + 3',1 |
| Moyenne + 1',5 | | + 4',2 | + 5',7 | | + 3',1 |

**Face à l'est :**

+3',6;+3',7;+3',9;+3',8;+2',6;+4',3;+4',9;+4',2;+4',5;+5',0. Moy. +3',9.

**Face à l'ouest :**

+7',3;+4,4;+3,1;+4,6;+3,3;+4,0;+4,8;+3,0;+1',9;+3',6.Moy.+4,0

On voit que la moyenne, — 2′,1, des collimations non corrigées prises face au nord, diffère de la moyenne + 7′,7 des observations du sud d'un angle de 9′,8, à très peu près égal au double de l'angle $i = 5',0$, qui correspond à une durée moyenne de 127 secondes du tour de précession, qui est celle des observations méridiennes. Ceci est bien conforme à la théorie.

Aux points intercardinaux, les collimations non corrigées doivent naturellement présenter des divergences moins fortes que les précédentes, et on constate que la correction ramène encore à l'égalité des moyennes primitivement très divergentes. Enfin, aux points est et ouest la correction doit être nulle, et effectivement les moyennes des collimations observées coïncident sans correction. Leur valeur est un peu plus forte que celles des collimations corrigées des observations qui précèdent, et cela tient peut-être à ce que l'influence de la rotation de la terre n'est qu'approximativement évaluée. Mais comme la lecture des angles n'est guère exacte qu'à deux minutes près, il serait illusoire de chercher une plus grande approximation.

Ces observations ne laissent, je pense, aucun doute sur l'action perturbatrice de la rotation de la terre et confirment l'exactitude des considérations théoriques qui permettent d'en corriger l'effet. Je n'aurais probablement jamais pensé à en tenir compte sans les résultats remarquables obtenus par M. Ph. Gilbert avec le barogyroscope (*).

Il est vrai qu'une importante cause d'erreurs peut être ainsi évitée, mais il en est une autre, plus dangereuse, qui provient du défaut de fixité des lentilles. Ce défaut est connu du commandant Fleuriais, c'est dire qu'il disparaîtra bientôt.

En mer, à bord du *Niger*, le 11 août 1888.

---

(1) Voir dans le beau mémoire de M. Gilbert *Sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif*, publié au tome VI et au tome VII de ces ANNALES, le paragraphe XX, intitulé : *Toupie de Foucault*, (t. VII, pp. 94-107). La déviation produite par la rotation terrestre y est donnée, page 99, équation (193). Ce résultat est bien vérifié par les observations précédentes.

# NOTE

SUR LES

# SYSTÈMES DE PÉNINVARIANTS PRINCIPAUX

## DES FORMES BINAIRES

PAR

M. Maurice d'OCAGNE.

---

Dans une Note insérée l'an passé dans les *Annales de la Société scientifique* (p. 314), j'indiquais le problème consistant à exprimer les péninvariants principaux ordinaires $v_p$ au moyen des péninvariants principaux $\varphi_p$ que j'ai fait connaître, et réciproquement. J'insistais sur la difficulté que présentait ce problème et je donnais un tableau de formules obtenues par un calcul de proche en proche et qui faisaient pressentir de curieuses formules générale.

J'ai eu l'heureuse chance d'appeler, par cette Note, sur le problème en question, l'attention d'un algébriste d'une rare habileté, M. E. Cesaro, qui, par un emploi ingénieux du calcul symbolique, a établi les formules générales correspondant au cas des *indices pairs*. Partant à mon tour de ce résultat, je suis parvenu, au moyen d'un calcul que j'indiquerai plus loin, aux formules générales correspondant au cas des *indices impairs*. Le problème posé dans ma Note de l'an passé se trouve donc ainsi complètement résolu. Avant d'en faire connaître la solution, je proposerai une notation dont ce qui suit fera ressortir l'utilité :

Étant données une suite de quantités affectées d'indices $u_0$, $u_1$, $u_2$, ..., $u_n$ ..., je désignerai par *la même lettre dépourvue d'indice* une variable fictive par rapport à laquelle,

dans la suite précédente, chaque quantité aurait pour dérivée celle qui vient immédiatement après elle, c'est-à-dire telle que

$$\frac{du_0}{du} = u_1, \quad \frac{du_1}{du} = u_2, \ldots, \frac{du_n}{du} = u_{n+1}, \ldots$$

Cette définition posée, je rappellerai que les péninvariants principaux que j'ai fait connaître pour la forme

$$a_0 x^n + \frac{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} y^2 + \cdot \quad + a_n y^n,$$

sont donnés par

$$(1) \quad \ldots \quad \varphi_p = a_0^p \frac{d^p l a_0}{da^p} \quad (p = 2, 3, 4, \ldots, n),$$

d'où résulte immédiatemont

$$(2) \quad \ldots \ldots \quad \varphi_{p+1} = a_0 \frac{d\varphi_p}{da} - p a_1 \varphi_p.$$

Quant aux péninvariants principaux ordinaires, ils sont donnés par

$$(3) \left\{ \begin{aligned} & v_{2p} = a_0 a_{2p} - 2p a_1 a_{2p-1} + \frac{2p(2p-1)}{1.2} a_2 a_{2p-2} - \cdots \\ & \pm \frac{1}{2} \frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1.2\ldots p} a_p^2, \end{aligned} \right.$$

$$(4) \quad \ldots \ldots \quad v_{2p+1} = a_0 \frac{dv_{2p}}{da} - 2a_1 v_{2p}.$$

Voici maintenant les formules de M. Cesaro :

Représentant par $\overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\varepsilon_r$ la somme de tous les produits analogues à $\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2} \ldots \varepsilon_{r_i}$, où $r_1 + r_2 + \cdots + r_i = p$, en nombres entiers et positifs (algorithme isobarique), on a

$$(5) \quad \ldots \quad v_{2p} = \frac{(2p)!}{a_0^{2p-2}} \sum_{i=1}^{i=p} \left\{ \frac{2^{i-1}}{i!} \overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}} \left[ \frac{\varphi_{2r}}{(2r)!} \right] \right\}.$$

$$(6) \quad \ldots \quad \varphi_{2p} = (2p)! \sum_{i=1}^{i=p} \left\{ (-2)^{i-1} \frac{a_0^{2p-2i}}{i} \overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}} \left[ \frac{v_{2r}}{(2r)!} \right] \right\}.$$



Quant aux formules que j'ai déduites des précédentes, elles s'écrivent, en supposant $v_{2p}$ et $\varphi_{2p}$ remplacés par leurs expressions (5) et (6) et faisant toujours usage de la notation symbolique définie en commençant,

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad v_{2p+1} = \frac{dv_{2p}}{d\varphi},$$

$$(8) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varphi_{2p+1} = \frac{d\varphi_{2p}}{dv},$$

Ce sont les formules (5), (6), (7) et (8) qui donnent la solution complète du problème que nous avions en vue.

Pour la démonstration des formules (5) et (6), je renverrai à la Note de M. Cesaro (*), où elles ont été données, et je me contenterai d'indiquer la démonstration (**) de mes nouveller formules (7) et (8), ou plutôt de la première d'entre elles, cas les deux démonstrations sont tout à fait analogues.

Appliquant à l'expression (5) de $v_{2p}$ l'opération désignée symboliquement par $\frac{d}{da}$, on a, en écrivant $\overset{i}{\underset{p}{S}}$ pour $\overset{i}{\underset{p}{S}}\left[\frac{\varphi_{2r}}{(2r)!}\right]$,

$$(9) \quad \ldots \quad \frac{dv_{2p}}{da} = \frac{(2p)!}{a_0^{2p-1}} \sum_{i=1}^{i=p} \left\{ \frac{2^{i-1}}{i!} \left( a_0 \frac{d\overset{i}{\underset{p}{S}}}{da} - (2p-2)\, a_1 \overset{i}{\underset{p}{S}} \right) \right\}.$$

Si l'on porte les valeurs (5) et (9) de $v_{2p}$ et $\frac{dv_{2p}}{da}$ dans (4), il vient

$$(10) \quad \ldots \quad v_{2p+1} = \frac{(2p)!}{a_0^{2p-2}} \sum_{i=1}^{i=p} \left\{ \frac{2^{i-1}}{i!} \left( a_0 \frac{d\overset{i}{\underset{p}{S}}}{da} - 2pa_1 \overset{i}{\underset{p}{S}} \right) \right\}.$$

Si nous écrivons $\overset{i}{\underset{p}{S}}\left[\frac{\varphi_{2r}}{(2r)!}\right]$ sous la forme

$$S_p \frac{\sum_{k=1}^{k=i} \varphi_{2r_1} \varphi_{2r_2} \cdots \varphi_{2r_i}}{(2r_1)!\,(2r_2)!\ldots(2r_i)!},$$

(*) *Nouvelles annales de mathématiques*, 3e série, t. VII, p. 464.

(**) J'ai communiqué dernièrement cette démonstration à la *Société mathématique de France*.

nous voyons que

$$\frac{d\overset{i}{\underset{p}{S}}}{da} = S_p \frac{\sum_{k=1}^{k=i} \varphi_{2r_1}\varphi_{2r_2}\cdots\frac{d\varphi_{2r_k}}{da}\cdots\varphi_{2r_i}}{(2r_1)!(2r_2)!\dots(2r_k)!\dots(2r_i)!}.$$

Mais, de (2), on déduit

$$(11) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{d\varphi_{2r_k}}{da} = \frac{\varphi_{2r_{k+1}} + 2r_k a_1 \varphi_{2r_k}}{a_0}.$$

Transformant la formule précédente au moyen de celle-ci, e tenant compte de la condition $r_1 + r_2 + \cdots + r_i = p$, on voi que

$$\frac{d\overset{i}{\underset{p}{S}}}{da} = \frac{1}{a_0} S_p \frac{\sum_{k=1}^{k=i} \varphi_{2r_1}\varphi_{2r_2}\cdots\varphi_{2r_{k+1}}\cdots\varphi_{2r_i}}{(2r_1)!(2r_2)!\dots(2r_k)!\dots(2r_i)!} + \frac{2pa_1}{a_0}\overset{i}{\underset{p}{S}}.$$

d'où

$$a_0\frac{d\overset{i}{\underset{p}{S}}}{da} - 2pa_1\overset{i}{\underset{p}{S}} = \underset{p}{S} \frac{\sum_{k=1}^{k=i} \varphi_{2r_1}\varphi_{2r_2}\cdots\varphi_{2r_{k+1}}\cdots\varphi_{2r_i}}{(2r_1)!(2r_2)!\dots(2r_k)!\dots(2r_i)!}.$$

Or, le second membre de cette expression n'est autre chose, avec notre notation, que $\frac{d\overset{i}{\underset{p}{S}}}{da}$. La formule (10) devient donc

$$v_{2p+1} = \frac{(2p)!}{a_0^{2p-2}} \sum_{i=1}^{i=p} \left\{ \frac{2^{i-1}}{i!} \cdot \frac{d\overset{i}{\underset{p}{S}}}{da} \right\},$$

ou, en rapprochant de (5),

$$v_{2p+2} = \frac{dv_{2p}}{da}.$$

La formule (7) se trouve ainsi établie. La démonstration de la formule (8) est analogue avec cette différence que c'est la formule (4) qui y joue le rôle rempli ci-dessus par la formule (11).

Voici un exemple d'application :

Les formules (5) et (6) de M. Cesaro donnent

$$v_6 = \frac{\varphi_6 + 30\varphi_2\varphi_4 + 60\varphi_2^3}{a_0^4}, \quad \varphi_6 = a_0^4 v_6 - 30 a_0^2 v_2 v_4 + 120\, v_2^3.$$

Au moyen de mes formules (7) et (8), j'en déduis immédiatement.

$$v_7 = \frac{\varphi_7 + 30(\varphi_2\varphi_5 + \varphi_3\varphi_4) + 180\,\varphi_2^2\varphi_3}{a_0^4},$$

$$\varphi_7 = a_0^4 v_7 - 30 a_0^2 (v_2 v_5 + v_3 v_4) + 360\, v_2^2 v_3.$$

On retombe bien ainsi sur les formules qu'avait données le calcul de proche en proche, et qui figuraient dans ma Note de l'an passé.

---



# NOTICES PALÉONTOLOGIQUES

(Cfr. *Annales de la Société scientifique*, 1887, p. 308.)

PAR

**l'abbé Gérard Smets**

docteur en sciences,
professeur au Collège épiscopal de Hasselt.

---

## I

### *Silurus Egertoni*, Sow.

Parmi les nombreux poissons fossiles rencontrés dans nos terrains bruxelliens, il n'en est guère de plus intéressant, que le *Silurus Egertoni*, Sow., qui s'y rencontre assez rarement.

Les *Siluridæ* sont des poissons d'eau douce : leur tête est large et déprimée, leur armature dentaire est puissante; la peau est nue ou couverte d'une cuirasse formée par des écussons osseux. Agassiz en faisait des *Ganoïdes;* Muller les a classés définitivement dans les *Physostomes*. Cette famille renferme actuellement un assez grand nombre de genres et d'espèces, répandus dans les rivières des pays chauds; mais jusqu'ici elle est peu représentée durant les âges géologiques.

Dans la collection de M. Delheid, nous avons trouvé, sur un fragment d'une roche blanche, des écussons osseux de la région occipitale de *Silurus Egertoni*, Sow., en dessous desquels nous observons dans la roche des débris indéterminables de crâne. Ces fossiles ont été rencontrés à Saint-Gilles, dans le *sable quartzeux* (bruxellien).

Les écussons sont couverts d'un grand nombre de tubercules arrondis, ne ressemblant pas complètement aux granulations et aux vermiculations des écussons osseux du *Silurus glanis* actuel.

La table externe des écussons est recouverte d'une mince couche d'émail d'une blancheur éclatante. Le seul écusson bien conservé est le sus-occipital; il porte en arrière une crête médiane bien accentuée et l'écusson, au lieu d'être plat comme chez le *Silurus glanis* actuel, forme un angle dièdre obtus. Au milieu de la longueur de l'écusson, la crête disparaît et l'os s'aplatit davantage et il se termine en une pointe aiguë se prolongeant un peu entre les écussons pariétaux. En avant aussi, un certain nombre de tubercules se disposent en séries rectilignes.

La largeur de cet écusson est de 50 millimètres, sa largeur de 32, son épaisseur de 2 à 3 millimètres.

Sur les côtés du sus-occipital, quelques fragments des épiotiques et des pariétaux sont encore en place.

La disposition relative des écussons osseux, nous semble-t-il, rappelle mieux celle de l'esturgeon que celle des *Silures* actuels.

Outre l'intéressant fait de distribution géologique, ces fossiles montrent que ce *Silurus* avait probablement un crâne moins aplati, dans la région occipitale, que la plupart des représentants actuels de cette série.

## II

### *Gavialis Dixoni*, Owen.

La même collection renferme deux os allongés :

*a*) La moitié supérieure d'un humérus trouvé dans le laekenien, gravier de la base, localité Saint-Gilles;

*b*) Un autre fragment de diaphyse d'un os allongé, arrondi d'un côté, plus aplati de l'autre, trouvé dans le même gravier, à Tenbosch.

Le premier os a tous les caractères de l'humérus de *crocodilien procœlien*, notamment des *Gavialidés*, par la forme de sa tête, de son trochanter, de la gouttière, etc.; complet, il pouvait atteindre 16 à 17 centimètres de longueur.

Le second os paraît être un fragment de radius d'un crocodilien.

On a signalé (¹) très rarement la présence d'un crocodilien, *Gavialis Dixoni*, Owen (²), dans le bruxellien et le gravier de la base du laekenien. Nous croyons devoir attribuer ces deux os au même animal.

Comparaison faite avec l'humérus des crocodiliens procœliens, l'humérus de la collection de M. Delheid montre aussi une grande affinité avec celui de *Holops obscurus* (³), de Cope.

Au dernier moment, nous recevons de M. Delheid un nouvel envoi de fossiles : nous y trouvons 2 vertèbres caudales de crocodilien et 2 scutes osseux, trouvés également dans le laekenien, gravier de la base, Saint-Gilles. Ces pièces nous semblent appartenir au même *Gavial;* elles montrent que ce reptile y était plus fréquent qu'on ne l'a cru jusqu'ici.

M. de la Vallée Poussin, notre éminent professeur de géologie, attire notre attention sur l'importance de la découverte d'animaux d'eau douce dans ces étages géologiques et sur la nécessité de consigner ces faits de distribution. Il nous montre, en même temps, le parti que le géologue pourra tirer de ces faits pour l'interprétation des terrains.

---

(¹) DIXON, *The geol. and foss. of the tert. and cretac. form. of Sussex*, p. 208.

(²) OWEN, *Palæontographical Society*, 1849, tab. X.

(³) COPE, *Transaction of the American philosophical Society*, vol. XIV. 1871, pl. IV, fig. 2.

---

# LES

# CHÉLONÉES RUPÉLIENNES

PAR

**l'abbé Gérard SMETS**

docteur en sciences,
professeur au Collège épiscopal de Hasselt.

---

Nous avons publié ([1]), dans les *Annales de la Société scientifique*, quelques notices bien incomplètes sur les Chélonées rupéliennes, d'après des matériaux, qui nous avaient été confiés par M. le professeur P.-J. Van Beneden.

La collection de M. Delheid, si généreusement mise à notre disposition, renferme de nombreux restes de ces animaux, ce qui nous permet de donner la diagnose de ces intéressants reptiles.

Presque tous les os du squelette, et appartenant à des individus de tous les âges, sont représentés dans cette collection et parfois répétés plusieurs fois. Malheureusement, beaucoup de ces fossiles sont à l'état fragmentaire. Deux individus, conservant une partie de leur squelette osseux, ont été parfaitement bien montés par M. Sonnet, du Musée de Bruxelles.

Récemment encore, M. Richard Storms, notre savant collègue de la Société scientifique, nous a envoyé gracieusement un bon nombre d'ossements provenant de la même argile rupélienne (oligocène moyen) et appartenant aux mêmes animaux.

Au début de ces études longues et ingrates, nous avions cru devoir établir plusieurs espèces, mais l'examen approfondi des

---

([1]) Dr SMETS, *Les tortues rupeliennes*. (ANNALES, 1885, p. 12; — id. *Chelone Van Benedenii*, 1886, p. 109; — id. *Chelone Waterkeynii*, 1887, p. 291; — id. *Chelyopssi littoreus*, 1887, p. 304.)





ossements démontre que ces centaines de pièces se répartissent seulement entre deux espèces bien distinctes : *Chelone Van Benedenii* (1), Smets, et *Chelone Waterkeynii* (2), Van Ben.

Aujourd'hui que nous avons des matériaux si étendus, nous pouvons non seulement compléter, mais également corriger nos notices antérieures : Les pièces que nous avons attribuées à *Chelyopsis littoreus* appartiennent : la vertèbre dorsale et l'ilion à *Sphargis* (*Psephophorus*) *rupeliensis*, les autres pièces (l'humerus et écaille costale) à *Ch. Van Benedenii*, et, par conséquent, ce premier nom rentre dans la synonymie.

Les pièces de la tête et du cou, attribuées (3) à *Ch. Van Benedenii*, dans une notice précédente, appartiennent à *Ch. Waterkeynii.*

Dans deux publications magistrales (4), Rutimeyer a démontré que les véritables *Chélonées* (tortues marines, à l'exclusion des *Sphargis*) sont plus rares aux âges géologiques qu'on ne le croyait jusqu'alors. En dehors de quelques espèces bien définies, le reste des tortues exhumées des couches plus anciennes que le milieu de l'ère tertiaire, et décrites comme *Chelone*, ainsi qu'un grand nombre d'autres tortues de ces époques reculées, présentent des caractères de collectivité, qui placent ces animaux de transition entre les tortues paludines et les véritables *Chélonées*.

Tels sont les animaux désignés, par ce savant chélonographe, sous le nom de *Thalassémydes* (5), *Thalassochélydes* (6), *Chélonémydes* (7).

Les tortues rupéliennes sont de vraies Chélonées, comme le démontrent :

---

(1) SMETS, *Annales de la Société scientifique*, 1885, p. 12.

(2) VAN BENEDEN, *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, t. XXXI, p. 12, 1871.

(3) SMETS, *Chelone Van Benedenii* (ANNALES, etc., 1886, p. 111 à 119.

(4) L. RUTIMEYER, *Die fossilen Schildkröten von Solothurn und der ubrigen Iuraformation*, Zurich, 1873, — id. *Ueber den Bau von Schale und Schädel bei lebenden und fossilen Schildkröten*, etc. (Verh. der Naturf. Gesel. in Basel, 1874 à 1878.)

(5) RUTIMEYER, *Ueber den Bau*, etc., p. 89.

(6) RUTIMEYER, *Die fossilen Schildkröten*, etc., p. 139.

(7) RUTIMEYER, *ibid.*, p. 170. Notre avis est cependant que ces Chélonémydes sont de véritables *Thalassites*.

*a*) la carapace plate et cordiforme, avec des fontanelles persistantes.

*b*) le plastron digité et également avec fontanelles persistantes durant tous les âges.

*c*) la structure de la voûte du crâne protégeant les muscles temporaux.

*d*) le coracoïdien.

*e*) la série des os marginaux.

*f*) les membres, notamment l'humérus et le fémur.

*g*) les doigts grêles et très allongés.

Elles sont donc construites d'après le type *Chelone*, si bien décrit par Rutimeyer. Elles présentent néanmoins quelques caractères intéressants rappelant de loin les tortues d'eau douce, mais ces caractères ne sont pas suffisants pour les distraire de la famille naturelle des *Cheloniidæ*, pas plus que les quelques caractères émydoïdes ([1]) (coracoïde, bassin, ptérygoïdien) de *Ch. Hoffmanni* ne sauraient motiver l'exclusion de cet animal de la même famille.

### *Chelone Van Benedenii.*

Cette tortue s'écarte ([2]) du type *Chelone* actuel par les caractères suivants :

1° Les choanes s'ouvrent à la partie antérieure de la voûte du palais et ne sont pas bordés en avant par les palatins (restauration de la tête d'après des fragments) ;

2° Le bassin, semblable à celui de *Ch. Hoffmanni*, rappelle dans son ensemble le bassin des Émydes, comme celui de la tortue crétacée ;

3° Il n'y avait que deux écailles sus-caudales.

Comme caractères spécifiques et distinctifs, on peut encore donner :

---

([1]) Rutimeyer, *Die fossilen Schildkröten*, etc., p. 151.

([2]) En décrivant les tortues, nous nous appuyons principalement sur la riche collection de M. Delheid; si le contraire a lieu, nous citerons la collection de M. Van Beneden ou de M. Storms.

1° La base ou le talon du quadratum est assez allongée;

2° Les vertèbres cervicales, à partir de la sixième, ont des centres avec des condyles et des cavités articulaires élargis et presque subdivisés;

3° Les pièces costales sont relativement peu ossifiées suivant leur longueur, bien que leur épaisseur soit notable; l'ossification n'avance pas au delà des $^{2}/_{3}$ de la longueur totale de la côte à l'âge adulte : les fontanelles de la carapace sont, par conséquent, énormes;

4° La dernière pièce sus-caudale a une forme spéciale; elle affecte la forme d'un V renversé dont les deux branches sont soudées de part et d'autre aux huitièmes écailles costales et laissant entre elles un espace triangulaire ;

5° Le bord osseux marginal était incomplet en arrière, ou peut-être cartilagineux; il n'y avait pas de pièce pygale, pas même à l'âge adulte.

L'examen surtout des nombreuses pièces costales de tous les âges et de toute grandeur montre qu'il existait deux variétés de *Ch., Van Benedenii;* nous constatons un fait analogue chez *Ch. Waterkeynii.*

La première a des pièces costales relativement larges et peu épaisses; la seconde a des pièces moins larges et plus épaisses. Nous croyons que ces différences sont sexuelles, la première renfermant les femelles, la seconde les mâles.

Chez *Ch. Van Benedenii,* la croissance se poursuivait encore longtemps après que l'animal avait acquis tous les attributs de l'âge adulte. Nous avons des humérus avec le canal ectépicondylien parfaitement formé et qui atteignent seulement la moitié de la taille d'humérus d'animaux adultes. Les changements qui surviennent avec l'âge sont parfois considérables : ils portent sur l'accentuation des cavités et des condyles articulaires, des apophyses, et sur l'ossification des cartilages qui recouvrent les extrémités des os et notamment l'extrémité distale de l'humérus.

Dans notre première notice sur cette tortue, nous avons attribué à la carapace une longueur de 80 centimètres environ. L'exemplaire monté par M. Sonnet atteint cette taille, avec une

largeur de carapace de près de 60 centimètres : la carapace est aplatie et cordiforme ; sans doute, à cause des énormes fontanelles, elle se brisait facilement sous la pression, car nous possédons peu de pièces costales entières.

TÊTE. — Os nasaux absents, comme dans toutes les chélonées. Frontal prenant part a la formation du bord orbitaire (collection de M. Storms). Voûte du crâne excessivement épaisse et construite d'après le type *Chelone*. Quadratum, analogue à celui des *Chelone* actuelles, avec une large cavité de l'oreille moyenne, un talon articulaire allongé; le ptérygoïdien se soude au quadratum à une certaine distance de l'extrémité distale.

Sus-occipital très développé, du moins à l'âge adulte et dépassant notablement la voûte (1) du crâne et le squamosal et s'appuyant sur l'opisthotique par une surface dentelée et par deux gouttières semi-circulaires; ces deux gouttières, en croissant, situées de part et d'autre du *foramen magnum* à la base du sus-occipital, sont assez singulières. Malheureusement, nous n'avons pas de crâne désarticulé de *Chélonée* actuelle pour constater la présence ou l'absence de ce caractère dans les tortues actuelles.

A l'âge adulte, le maxillaire a un bord très élevé et très tranchant, mais il est plus arrondi dans le jeune âge.

RÉGION CERVICALE. — Il est, en général, très difficile d'assigner avec certitude sa place à une vertèbre cervicale de Chélonée rencontrée isolément, parce que non seulement la nature de leur centre varie d'une espèce à l'autre, mais encore d'un individu à l'autre, dans les limites de la même espèce.

Nous admettons que la région cervicale de *Ch. Van Benedenii*, est construite d'après le type habituel chez les Chélonées, c'est-à-dire que la quatrième vertèbre est biconvexe, les précédentes convexo-concaves, les dernières concavo-convexes, ce qui est d'ailleurs confirmé par la forme des vertèbres que nous possédons.

---

(1) On sait que cette *crista occipitalis* du sus-occipital ne dépasse pas le mastoïdien chez *Sphargis* et *Th. Caouanna*, mais bien chez *Ch. Mydas* et *imbricata*.

Les premières vertèbres cervicales ont des crêtes ventrales énormes, diminuant dans les dernières vertèbres de cette région, de même des talons allongés et des volumineuses paradiapophyses. Nous ne trouvons pas de trace de côtes cervicales.

A partir de la cinquième vertèbre, le centre s'élargit notablement dans le sens transversal, et la cavité articulaire correspondante de la vertèbre suivante se modifie dans le même sens.

A la face ventrale, près de l'extrémité céphalique, la sixième vertèbre verticale porte, de part et d'autre de la ligne médiane, un tubercule qui semble avoir été en rapport avec une hypapophyse. Nous en avons trouvé un analogue chez *Thalassochelys caouanna*, mais seulement d'un côté de la ligne médiane. Cuvier et Paul Gervais ([1]) ont représenté des hypapophyses dans la région cervicale, le premier chez *Ch. Mydas*, le second chez *Sphargis*.

La tête de la huitième vertèbre cervicale est peu pédiculée; l'apophyse épineuse de cette vertèbre est aplatie et triangulaire; c'est sur cette surface triangulaire que se fait la rotation de la vertèbre sur la pièce nuchale. La face caudale des neurapophyses (*neuroïdes*, Baur) ([2]) est légèrement excavée, ce qui montre, ainsi que les caractères de la pièce nuchale et du crâne, que la tête n'était pas rétractile sous la carapace.

Région dorsale et caudale. — Les vertèbres dorsales sont très rares; elles ne nous semblent pas posséder des caractères particuliers et suffisants pour les distinguer de celles de *Ch. Waterkeynii*. Même, à moins d'avoir une série complète, on ne peut déterminer la place à donner à un corps de vertèbre trouvé isolément, parce qu'ils ont des caractères variables avec l'âge et la position qu'ils occupent dans la série. Ils semblent plus arrondis

---

([1]) Paul Gervais, *Ostéologie du Sphargis Luth*, p. 209 et pl. VIII, fig. 1.

([2]) Baur (*On the morphology of the Ribs*, American Naturalist, october 1887, p. 942) dit avec raison : « Owen's names *neurapophysis* and *pleurapophyses* are not correct; the neural and pleural arches are no processes of the vertebræ, but are distinct parts » et il les appelle *neuroïds* et *pleuroïds*.

que dans la *Ch. Waterkeynii;* les premiers sont cependant carénés à la face ventrale.

Nous possédons des fragments de vertèbres caudales, dont les neuroïdes sont soudés au corps; leurs petites dimensions indiquent une queue réduite et composée d'éléments semblables à ceux de la queue des Chélonées actuelles.

On peut voir que ces vertèbres caudales présentent aussi la dissymétrie caractéristique des vertèbres caudales des Chéloniens, sur laquelle nous avons attiré (¹) l'attention des naturalistes. Depuis lors, ayant eu l'occasion d'examiner encore plusieurs squelettes de Chéloniens, notamment au Muséum à Paris (²), nous avons pu constater que cette dissymétrie, se manifestant surtout dans les zygapophyses, et que l'alternance des mêmes modifications tantôt à droite, tantôt à gauche, étaient assez générales dans les Chéloniens.

Des paradiacostoïdes sacrées isolées ont été retrouvées parmi les ossements de cette espèce; elles se coossifient intimement et de bonne heure avec la huitième pièce costale. On trouve de ces pièces costales isolées, portant à leur face ventrale des apophyses, dirait-on, et on croirait que l'ilion se réunit à la carapace par suture, comme on l'observe dans beaucoup de tortues paludines. Ce ne sont que des restes de paradiacostoïdes brisées soudées intimement avec la carapace.

CARAPACE. — *Série neurale.* — La pièce nuchale est large et assez aplatie ; son bord est fort concave.

La plupart des pièces suivantes sont hexagonales; quelques-unes sont légèrement bombées suivant la ligne médiane; la série neurale semble avoir été complète.

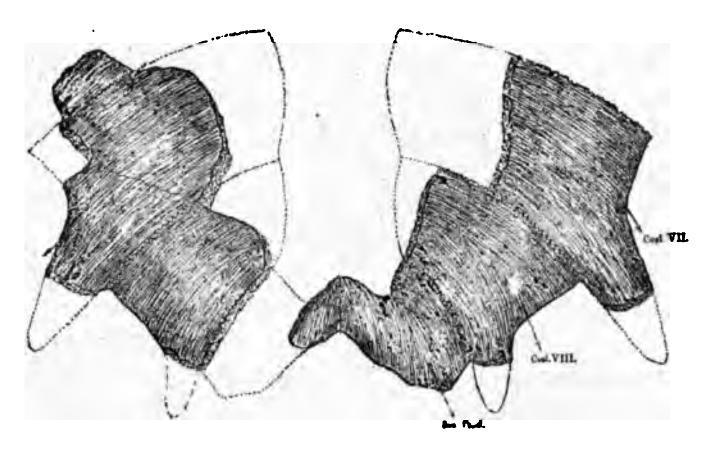
La dernière, deuxième sus-caudale, a des caractères tout à

(¹) Dr SMETS, *Notice ostéologique,* Muséum de Louvain, 1887, p. 394.

(²) Il nous est bien agréable de saisir cette occasion d'exprimer notre plus vive gratitude à M. le professeur Gaudry et aux savants naturalistes du Muséum, MM. Fischer et H Gervais, de leur gracieux accueil et de leur empressement à mettre à notre disposition les riches collections du Muséum.



fait particuliers. Comme nous l'avons déjà dit, elle a la forme d'un V renversé, dont les deux côtés sont soudés aux huitièmes pièces costales; elle présente, par consequent, une échancrure en arrière, dont les bords sont amincis, ce qui indique qu'elle n'était plus suivie d'une autre pièce osseuse, dont d'ailleurs nous ne trouvons aucune trace ni aucun vestige.



Costales VII et VIII et deuxième sus caudale, 1/4.

Dans les *Cheloniidæ,* c'est toujours la deuxième sus-caudale qui touche aux bords latéraux de la huitième pièce costale; nous devons donc assigner cette place à la pièce que nous décrivons. On sait que, dans les *Cheloniidæ,* il y a généralement trois sus-caudales, une chez les Chélydes, deux chez les Émydes.

*Séries dorsales.* — La carapace a huit paires de pièces costales et était recouverte de treize plaques cornées. Elle était assez aplatie, cordiforme, relativement large; les pièces costales sont peu ossifiées.

La première côte est petite comme dans la plupart des Chéloniens actuels.

Contrairement à ce que nous avions cru dès l'abord, les pièces isolées de la carapace ne fournissent que des indications très incomplètes, fallacieuses parfois, pour la distinction des espèces; les variations sont très grandes suivant les âges, d'un

individu à l'autre. Rutimeyer ([1]) a bien montré le peu de valeur à attribuer aux caractères des pièces osseuses, prises isolément : « So gut wie die Horndecke, dit-il, so gut darf die darunterliegende Knochenkruste nicht etwa in den einzelnen Stücken, sondern nur als eine allmählich wachsende und immer sich verändernde Gesammtheit beurtheilt werden, und kann namentlich nur so Werthe liefern, die unter sich verglichen werden dürfen. Will mann nicht mit unverständlichen Einzelheiten spielen, so muss man die Knochenschale..., unter allen Umständen als Ganzes, die Form des einzelnen Knochenstückes also nur in Beziehung zum Gesammtbau beurtheilen; sowohl wenn es sich um die Beurtheilung eines einzelnen Lebensmomentes, als da wo es sich gar um die vom Wachsthum und Alter abhängigen Veränderungen dieser Mosaïk handelt. Macht dies schon die Aufgabe des Auges nicht leicht, und namentlich sehr ermüdend, so ist es aber noch schwerer, für solche Collectivwahrnehmungen nur irgendwie einen entsprechenden Ausdruck zu finden. Worte und Zahlen erweis en sich hiezu gleich ärmlich, und erinnern in empfindlicher Weise, wie wenig die Sprache einstweilen den Leistungen der Sinne gewachsen ist. »

Nous avons déjà figuré ([2]) quatre pièces costales de *Ch. Van Benedenii.* Comme dans les terres rupéliennes les fragments de la carapace sont très répandus, nous donnerons sommairement les caractères permettant de distinguer, avec une certaine probabilité, les pièces isolées de deux reptiles ; mais aucun des caractères n'est constant, ni rigoureux.

La carapace de *Ch. Van Ben.* est, comparativement à celle de *Ch. Waterk.*, moins longue que large ; dans la première, la longueur de la carapace est à sa largeur comme 4 : 3; dans la seconde, la longueur est à la largeur comme 5 : 3. Ces différences peuvent s'atténuer ou s'exagérer avec l'âge.

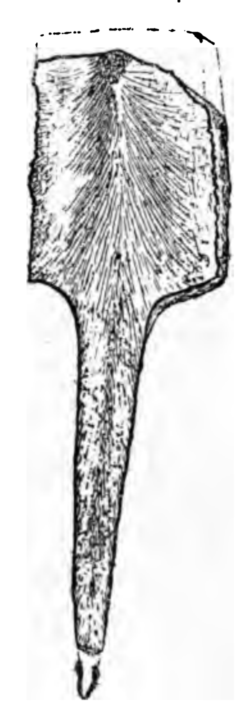
Les pièces costales de *Ch. Van Benedenii* sont généralement plus massives, plus épaisses que celles de la seconde tortue;

---

([1]) Rutimeyer, *Ueber den Bau*, etc., p. 9

([2]) Smets, *Ch. Van Benedenii*, op. cit., pp. 124, 125 et 126.

néanmoins les pièces des individus mâles de la seconde atteignent l'épaisseur des pièces des femelles dans la première espèce. Les côtes font généralement moins saillie à la face ventrale des pièces costales dans la première ; il faut en excepter néanmoins les premières. La face ventrale présente moins d'ornementation, moins de rides que chez *Ch. Waterkeynii*. A partir de la 3e costale, les pièces osseuses sont légèrement concaves à leur face dorsale chez *Ch. Waterkeynii*, les premières sont plus convexes, plus arquées que dans la Chélonée de Van Beneden.



4e costale gauche

Le prolongement de la côte au delà de la huitième pièce osseuse est fort mince dans la tortue de Van Beneden, et n'atteignait probablement pas la série marginale.

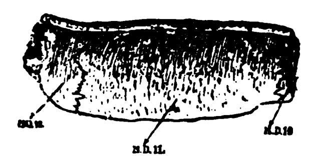
*Série marginale.* — Les pièces marginales des Chéloniens varient en nombre et en forme dans les individus d'une même espèce, dit-on ; cependant, c'est un fait assez constant (1) que, de chaque côté, il y a douze os marginaux dans les Chélonées ; les trois premiers ainsi que le dixième ne portent pas de trace d'insertion de côte, trace que tous les autres portent plus ou moins accusée. Nous n'avons pas encore trouvé d'exception à cette règle, qui nous servira à donner leur place à chaque pièce marginale.

Les trois premières pièces marginales ont leurs contours arrondis, elles sont aplaties et étendues en hauteur. Les suivantes sont carénées et à section triangulaire ; vers le milieu de la carapace, elles présentent une différenciation assez accentuée. Elles prennent, en section, la forme d'un V largement ouvert,

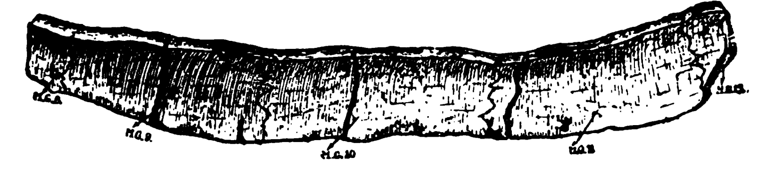
(1) M. F. Delfortrie, *Les Chéloniens du miocène de la Gironde*, Actes de la Société Linnéenne de Bordeaux, t. XXVII, 4e livraison, p. 15.

dont l'ouverture est tournée vers la carapace. Au delà, elles reprennent rapidement la forme triangulaire et deviennent minces et très élevées. La série marginale est incomplète en arrière, il n'y a pas de trace de pièce pygale.

Dans les tortues actuelles, l'ossification des pièces marginales débute par un point d'ossification dans chaque article de la série ; ensuite ces osselets séparés s'avancent les uns à la rencontre des autres. Dans *trois individus différents de Ch. Van Benedenii* (deux de la collection de M. Delheid, un de M. Storms), nous rencontrons le caractère suivant : A l'une des dernières pièces marginales , à la onzième dans l'animal adulte, à la dixième dans un jeune animal, s'ajoute uni par suture dentelée un petit os de 25, 15 et de 23 millimètres de longueur dans le sens caudal, ayant dans son ensemble tout à fait la forme de la pièce précédente : mais son bord postérieur est arrondi et l'os semble avoir été prolongé par du cartilage : c'est évidemment la marginale suivante.



Dernières marginales: côté droit



Dernières marginales: côté gauche.

La répétition de ce fait montre que ce n'est pas à la suite d'un accident arrivé durant la vie ou après la mort que ce caractère se présente.

L'ossification semblait donc suivre ici un autre *processus* que dans les tortues vivantes, et s'avancer, dans les dernières marginales, d'avant en arrière. L'individu, monté par M. Sonnet,

est fort adulte, par conséquent la série marginale restait partiellement cartilagineuse dans tous les âges. D'ailleurs, parmi les centaines d'ossements de cette *Chélonée*, nous n'avons pas trouvé un seul vestige de pièce pygale.

Ce caractère, unique (1), croyons-nous, n'est pourtant pas étonnant, ni une anomalie si l'on suit le développement de la carapace chez les Chélonées actuelles. On sait (2) que dans celles-ci contrairement à ce qui a lieu chez les chersites « die forme der Schale im Ganzen wie im einzelnen auf rasche Ausbildung im vordern Theile, auf sehr almählichcs auswachsen im hintern Theile, hinweist also in hohem Grade prosthenisch erscheint. »

Plastron. — Le plastron, avec ses fontanelles persistantes, ses digitations s'étendant de dedans en dehors ou inversement, sans tendre à se relever, plastron de vrai Chélonée, n'offre rien de remarquable.

L'épiplastron est assez large dans sa partie antérieure (4 centimètres dans un exemplaire) ; son bord antérieur interne était en relation assez étendue avec l'entoplastron ; les hyoplastrons sont plats ainsi que les hypoplastrons et atteignaient, vers leur milieu, une notable épaisseur. Nous avons déjà décrit (3) et figuré le xiphiplastron, appartenant à la collection de M. Van Beneden.

Membres. — Si les membres de tortues donnent des indications précieuses pour déterminer la famille zoologique à laquelle appartient un animal, dans les limites d'un même groupe, surtout dans les *Chélonées*, ils n'offrent que peu de variations pour la distinction des espèces, voire même des genres. « Dans les tortues marines, disions-nous (4) au début de ces recherches, où les membres ne jouissent pas de mouvements étendus et servent principalement à la natation, il est très difficile de saisir les différences existant entre les os des membres de deux espèces voisines, et, à moins de les trouver en place, on ne peut souvent

---

(1) Rutimeyer, *Ueber den Bau*, etc., p. 15.
(2) Rutimeyer, *ibid.*, p. 36.
(3) Smets, *Ch. Van Benedenii*, op cit., p. 127.
(4) Smets, *Ch. Waterkeynii*, etc., op cit., p. 297.

les attribuer que dubitativement à une espèce déterminée. »

Ajoutons-y les différences résultant de l'âge, du sexe, et enfin un autre facteur important, que l'on ne saurait méconnaître en présence d'ossements trouvés à des niveaux différents, les différences résultant de l'évolution des êtres, on comprendra les difficultés que le paléontologiste a à surmonter, même quand il est en possession d'os intégralement conservés.

CEINTURE SCAPULAIRE. — Tous les os en sont conservés. L'omoplate est très allongée et conserve, hormis à son origine, un diamètre restreint.

L'extrémité distale des précoracoïdes est plus volumineuse et plus arrondie que celle de l'omoplate; les précoracoïdes se rencontraient sur la ligne médiane.

Le coracoïde est arrondi près de son origine et s'élargit au delà; sa face inférieure est fortement concave, caractère qui le différencie d'avec celui de *Ch. Waterkeynii*.

A l'extrémité distale du coracoïde, le ligament fibro-cartilagineux s'étendant (¹) jusqu'au précoracoïde est ossifié à son origine.

HUMÉRUS.— L'humérus a la totalité des caractères *Chelonoïdes* (²). Nous l'avons déjà décrit dans une notice précédente. Les condyles sont très développés et le canal ectépicondylien est formé de bonne heure.

Généralement les os de l'avant-bras et de la jambe manquent ou on ne les rencontre qu'à l'état isolé : l'animal mort, les extrémités non retirées sous la carapace étaient emportées par les courants.

BASSIN. — Dans un individu adulte les trois os du bassin sont solidement coossifiés entre eux.

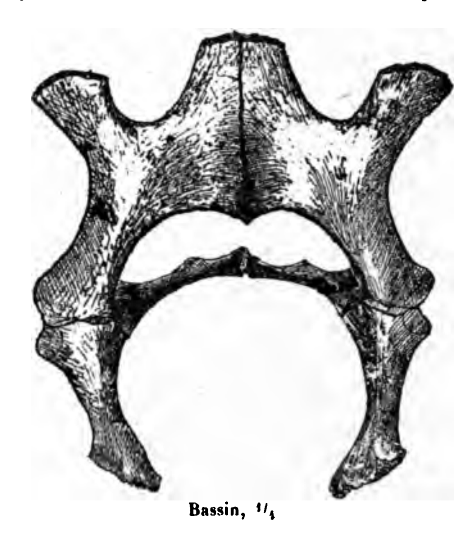
Les pubis sont synostosés entre eux sur la ligne médiane, par suite de l'ossification du cartilage interpubien (prépubien?), ils

---

(¹) Dr GEGENBAUER, *Untersuchungen zur vergleichenden Anatomie des Wirbelthiere*. Leipzig, 1865, pp. 37 et 38, fig. 2 et 3 de la planche III.

(²) Cfr. DOLLO, *Bulletin du Musée royal d'histoire naturelle de Bruxelles*, t. V., p. 79,

forment en avant un bord convexe en arc de cercle; leur symphyse se prolonge en arrière en pointe obtuse vers l'ischion. Leurs apophyses latérales s'infléchissent vers le plastron.



Bassin, 1/1

Les ischions sont étendus en hauteur et atteignent le maximum vers le milieu de leur longueur; là, ils envoient vers le plastron une apophyse inférieure rappelant celle des tortues paludines, notamment celle des *Chélydes*, où elle se coossifie avec le xiphiplastron.

Entre les pubis et les ischions, la large ouverture est rétrécie vers le milieu, elle était séparée durant la vie par le cartilage unissant les pubis aux ischions, cartilage ossifié (1) chez *Ch. Hoffmanni*.

Ces trous ovalaires ont le grand axe dirigé transversalement et non pas longitudinalement comme dans la Chélonée de Maestricht.

L'ilion, aminci et arrondi vers le milieu de sa longueur, s'élargit notablement à son extrémité distale et s'unit à la huitième costale par des ligaments.

---

(1) WINKLER, *Des tortues fossiles conservées dans le Musée Teyler*, etc. Harlem, 1869. p. 56 et pl. VIV, fig. 48.

Fémur. — Ce que nous avons dit de l'humérus, on peut le redire du fémur; il a les caractères des *Cheloniidæ*, sans posséder des caractères spécifiques. Il semble seulement que l'axe de sa tête est moins incliné sur la diaphyse, et elle est projetée plus en dehors que chez *Ch. Waterkeynii*.

Tibia. — Nous rencontrons également ici sur la face interne concave une échancrure allongée, assez profonde, dont nous ignorons la véritable signification.

Phalanges. — Au milieu des débris appartenant à cette espèce, nous trouvons quelques phalanges de la main et du pied : elles sont grêles, allongées et présentent des condyles articulaires faiblement indiqués. Nous en avons déjà figuré dans notre premier travail sur cette tortue.

Dimension des os. — Voici les dimensions de quelques os d'animaux adultes :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Humérus | | 170 | millimètres. |
| Omoplate | | 168 | » |
| Coracoïde | | 200 | » |
| Quatrième pièce costale | Longueur | 290 | » |
| | Largeur | 92 | » |
| | Épaisseur | 15 | » |
| Hauteur de la onzième pièce marginale | | 43 | » |
| Corde de l'arc de la pièce nuchale | | 150 | » |
| Flèche | | 35 | » |
| Longueur d'une moitié de la sus-caudale | | 70 | » |
| Distance horizontale entre les deux branches de la deuxième sus-caudale | | 110 | » |
| Fémur | | 95 | » |
| Tibia | | 80 | » |
| Longueur de la suture des pubis | | 90 | » |
| Longueur de l'ilion | | 100 | » |
| Ischion | Longueur | 55 | » |
| | Hauteur maxima | 25 | » |
| Grand axe d'un trou ovalaire | | 55 | » |
| Petit axe longitudinal | | 30 | » |
| Paradiacostoïde sacrée (énorme) | | 90 | » |
| Hauteur du sus-occipital | | 79 | » |

GISEMENT. — Tous ces ossements sortent du rupélien de la Basse-Belgique (oligocène moyen).

LOCALITÉS. — Le plus grand nombre des restes de *Ch. Van Benedenii* a été rencontré à Steendorp; d'autres à Rupelmonde, Tamise, Terhaegen et Basel.

**Chelone Waterkeynii** (1), **Van Ben.**

Nous avons cru longtemps que cette tortue était de petite taille; nous avons trouvé, dans la collection de M. Delheid, quelques pièces, appartenant incontestablement à cette espèce et dénotant presque les dimensions de *Ch. Van Benedenii;* mais ces ossements de grande taille sont rares.

TÊTE. — Rostre triangulaire, figuré (2) dans une notice précédente et attribué à *Ch. Van Benedenii.*

Frontal ne prenant pas part, ou très peu seulement, à la formation du bord orbitaire. Voûte du crâne construite d'après le type *Chelone* (3).

Quadratum d'une forme spéciale : la cavité de l'oreille moyenne est rétrécie et étroite; les ptérygoïdiens se soudent presque jusqu'au bord distal, par conséquent le talon articulaire est peu développé.

Sus-occipital semblant s'élever moins haut que chez l'animal précédent.

Palatins non soudés au-devant des choanes et étendus en hauteur.

Courte symphyse à la mandibule.

RÉGION CERVICALE. — Les vertèbres cervicales sont relativement plus hautes que chez *Ch. Van Benedenii.*

---

(1) VAN BENEDEN, *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, t. XXXI, p. 12, 1871.
(2) SMETS, *Chelone Van Benedenii*, op. cit., p. 111.
(3) RUTIMEYER, *Ueber den Bau*, etc., p. 56.

La tête et les cavités articulaires des dernières vertèbres ne se subdivisent pas en deux têtes ou deux surfaces, pas même dans la dernière articulation du cou, qui est généralement subdivisée chez les tortues marines.

Les têtes articulaires, ou plutôt le prolongement du centre au delà des neuroïdes, de la 5e et de la 7e vertèbre, sont longuement pédiculées; la 6e vertèbre nous manque.

La 7e a une apophyse épineuse très élevée et élargie transversalement.

Par ces caractères, *Ch. Waterkeynii* s'écarte sensiblement des Chélonées actuelles et se rapproche également des tortues paludines. Il est incontestable que la région cervicale était très mobile, ce qui est confirmé par une véritable cupule, excavation profonde de la face caudale des neuroïdes de la 8e cervicale. On sait que cette face est en rapport avec un muscle spécial aux Chéloniens, muscle qui de l'intérieur de la carapace, attaché aux intervalles compris entre les côtes et les vertèbres, sous leur bifurcation, vient en se dirigeant d'arrière en avant se porter sur la face postérieure des neuroïdes de la 8e cervicale, qu'il doit tendre à relever par ses contractions. Cette excavation des neuroïdes semble montrer que la région cervicale de cette tortue avait des mouvements plus étendus que celle des tortues marines actuelles, ce que confirment d'ailleurs des apophyses épineuses élevées et des insertions musculaires mieux accentuées. Même en présence de la pièce nuchale à bord antérieur relativement peu concave et de la convexité des premières pièces costales, on pourrait se demander si cette tortue ne retirait pas la tête sous la carapace, bien qu'elle eût les muscles temporaux protégés par une voûte osseuse.

VERTÈBRES DORSALES. — Un certain nombre de corps vertébraux de la région dorsale sont conservés; ceux des premières vertèbres sont carénés et les suivants plus ou moins arrondis à leur face ventrale, et leur canal médullaire est plus élargi. Chez la plupart, on rencontre, parfaitement conservée, l'échancrure médiane triangulaire, à la face céphalique et caudale, comme on l'observe dans la *Caouanna*.

Carapace. — *Série neurale.* — La pièce nuchale a le bord antérieur peu concave; elle porte une apophyse triangulaire ventrale assez élevée dans le jeune âge. Les pièces neurales suivantes sont grossièrement hexagonales, mais leur bord céphalique est souvent concave ou échancré, comme on l'observe dans *Plesiochelys Sanctæ Verenæ*, Rutimeyer ([1]). Les pièces suivantes deviennent irrégulières, se réduisent et s'arrondissent et quelques-unes sont complètement entourées par les pièces costales, comme cela a lieu aussi dans *Thalassochelys caouanna* de nos jours. Nous trouvons ce caractère chez la tortue montée par M. Sonnet, mais de plus nous avons quelques pièces neurales isolées, arrondies, caractère qui ne se rencontre que là où les pièces costales se rejoignent sur la ligne médiane.

La dernière sus-caudale rappelle complètement la même pièce de la *Caouanna* et elle rencontre la pièce pygale.

*Séries costales.* — Dans les premières costales et dans le jeune âge surtout, les côtes font fortement saillie à la face ventrale; ces pièces sont arquées. Aussi la carapace est-elle assez convexe dans la partie antérieure.

Les stries décrites dans notre premier travail, véritable ornementation des pièces costales, si elles ne sont pas constantes, se rencontrent fréquemment.

En tenant compte de l'épaisseur et des proportions relatives des dimensions des écailles, cette tortue présente aussi deux variétés.

La première côte est réduite et elle se place parallèlement à la seconde.

La carapace s'aplatit au delà des premières costales; elle est proportionnellement plus allongée que celle de sa congénère rupélienne et elle se termine presque en pointe.

Les pièces costales sont généralement ossifiées sur une plus grande étendue que dans la tortue de Van Beneden.

Avec l'âge, la table externe perd de son poli, devient plus rugueuse, quasi vermiculée et la trace des écailles cornées disparaît.

---

([1]) Rutimeyer, *Die fossilen Schildkröten von Solothurn*, etc., pl. X, fig. 8, 9 et 10.

Parfois cette altération provient de la désagrégation accidentelle de la table externe (1) par des eaux chargées d'acide carbonique ou d'eaux sulfureuses. Comme les vermiculations sont assez régulières et disposées dans le même sens, nous ne pouvons admettre ici cette cause d'altération. Serait-ce un indice de la disparition des plaques cornées et de leur remplacement par une peau molle? Nous ne le croyons pas non plus.



4e costale gauche.

Nous savons (2) que les pièces costales se développent en épaisseur par l'adjonction à la table externe ou à l'interne ou aux deux, de minces couches osseuses qui font disparaître parfois les sutures entre deux pièces costales consécutives, ainsi que l'impression des écailles cornées.

De plus, entre les écailles cornées et les pièces osseuses de la carapace, il y a une mince membrane vasculaire (3), aux dépens des éléments de laquelle doivent se former les lames osseuses dorsales nouvelles; rien d'étonnant que, à l'endroit des canaux vasculaires, la carapace montre des sillons et des vermiculations vasculaires semblables à celles des Trionyx. Si dans quelques tortues, telle que *Ch. Van Benedenii,* les impressions des plaques cornées s'accentuent avec l'âge, la cause doit se trouver dans un processus différent du développement des pièces osseuses en épaisseur, tantôt dorsalement, tantôt ventralement ou même bilatéralement.

La 8e costale porte également des restes de paradiacostoïdes sacrées intimement soudées avec elle.

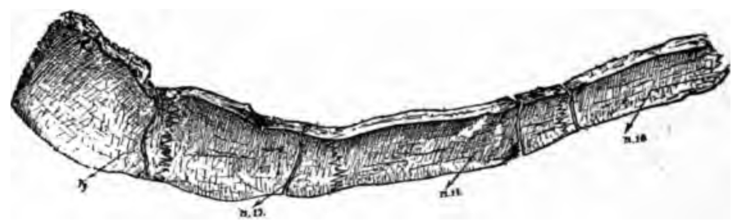
---

(1) RUTIMEYER, *Ueber den Bau,* etc., p. 119.

(2) RUTIMEYER, *Die fossilen Schildkröten,* etc., p. 15.

(3) SMETS, *Notes sur trois testudinides de l'Afrique australe* (ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, 1886, p. 6.)

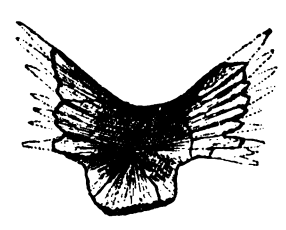
Écailles marginales. — La série en est complète dès le jeune âge. Les pièces antérieures sont arrondies; les suivantes carénées; celles du milieu de la région ont une section en forme de V moins accentuée que celle de *Ch. Van Benedenii;* au delà elles s'amincissent et gagnent en hauteur et ont une section triangulaire. Tandis que dans la Chélonée de Van Beneden les marginales 10, 11 et 12 ont à peu près la même hauteur, ici la hauteur augmente jusqu'à la 12me.



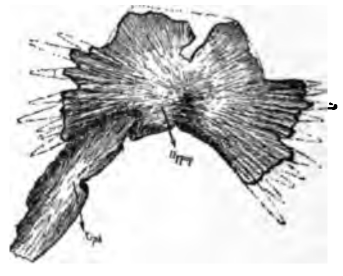
Dernières marginales et pygale.

La pièce pygale est quadrangulaire; elle est épaisse à son bord céphalique où elle est rencontrée par la 3e sus-caudale; elle est mince à son bord caudal et légèrement concave à sa face ventrale.

Plastron. — Il est inutile de décrire le plastron dans ses détails, étant composé d'os analogues à ceux du plastron des vraies Chélonées. Il est plus convexe, relativement plus volumineux et plus ossifié que celui de *Ch. Van Benedenii.* L'épaisseur de ses pièces est parfois notable, notamment celle de l'hyoplastron; par contre les xiphiplastrons sont réduits. Ces derniers sont dentelés sur leurs bords; cependant celui que nous avons déjà figuré ne présente



Hyoplastron.



Hypo- et xiphiplastron.

pas ces dentelures. Dans les tortues marines actuelles, les xiphiplastrons convergent l'un vers l'autre à leur extrémité distale, ici ils semblent le faire moins.

La variété à test osseux plus épais se reconnaît également dans le plastron plus ossifié, plus convexe et par une taille moindre : ce sont autant de signes du sexe mâle.

Membres. — Dans notre première notice sur cette charmante tortue, nous avons déjà figuré et décrit divers os de la ceinture thoracique et abdominale, ainsi que des membres.

Le coracoïdien est moins concave que celui de l'autre Chélonée et il reste bien mince, hormis à son origine dont l'épaisseur contraste avec celle du reste de l'os.

Généralement l'humérus a une diaphyse plus aplatie et plus mince, tandis qu'il est plus arrondi dans l'autre. Le canal ectépicondylien est rarement fermé, il n'y a donc qu'une échancrure : un humérus brisé, trouvé à Niel, mais pouvant atteindre au moins 15 centimètres, n'a encore qu'une échancrure ectépicondylienne. Dans l'extraction, plusieurs humérus ont été brisés vers le milieu de la longueur, où la diaphyse est assez faible.

Les os des membres, appartenant à des individus ayant acquis toute leur taille, sont fort rares, aussi bien que les pièces costales. On dirait que ce sont les sujets les plus faibles, les plus jeunes de ces animaux pélagiques qui sont venus échouer sur les plages de la mer rupélienne.

*Ch. Waterkeynii* avait des membres abdominaux assez réduits; ainsi l'ensemble des caractères semble indiquer que cet animal était plus adapté que le premier au séjour dans la haute mer.

Le bassin est réduit ; ses éléments sont grêles, fragiles et conservés à l'état fragmentaire.

Le pubis a la forme de celui des Thalassites actuels et le cartilage interpubien n'ossifiait pas.

Nous avons déterminé un certain nombre de phalanges trouvées avec les restes de la tortue de Waterkeyn, mais en l'absence de toute différenciation et de tout caractère particulier, il est inutile d'y insister.

En somme cette tortue représente, à quelques caractères près, les tortues marines actuelles; elle semble se rapprocher beaucoup de *Thalassochelys caouanna,* bien que sa carapace ne fût recouverte que de 15 plaques cornées.

GISEMENT. — Comme *Ch. Van Benedenii.*

LOCALITÉ. — Steendorp, Rupelmonde (assez fréquent), Niel et Terhaegen.

DIMENSION.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Tortue montée : Carapace. . . . . . . | Longueur | 42 | centimètres. |
| | Largeur | 22 | » |

D'après une série marginale, la carapace pouvait atteindre 70 à 75 centimètres. Une costale a 260 millimètres de long, 68 de large sur 9 millimètres d'épaisseur.

# CONTRIBUTION
# A L'ÉTUDE DES DILATATIONS

PAR LA MESURE

DU DÉPLACEMENT DES FRANGES D'INTERFÉRENCE

PAR

**M. Albert VAN BIERVLIET**

Docteur en sciences,
Professeur à l'Université de Louvain,
Membre de l'Association internationale des électriciens,
de la Société française de physique,
de la Société scientifique de Bruxelles

---

## HISTORIQUE (*).

M. Fizeau a fait connaître, en 1864, une méthode d'une grande délicatesse pour la mesure de la dilatation des corps solides de petites dimensions et spécialement des cristaux; exposons brièvement cette méthode :

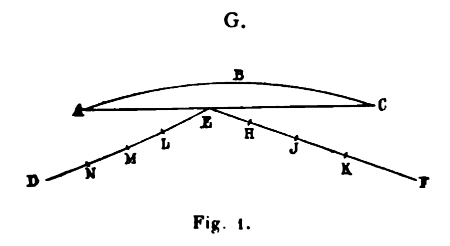


Fig. 1.

Soient ABC une lentille plan-convexe, dont je désigne la surface plane par $\nu$, et $\mu$ une surface réfléchissante de forme quelconque, mais dont tous les points soient peu éloignés de $\nu$. Plaçons au foyer principal G de la lentille une source de lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda$, et supposons, pour plus de facilité, cette source réduite a un point. Les

---

(*) Les mémoires de M. Fizeau ont été insérés dans les *Annales de chimie et de physique*, 4e série, t. II et t. VIII.

rayons lumineux partis de G sortiront de la lentille en un faisceau cylindrique perpendiculaire à la surface $\nu$ et, d'après la définition de la surface réfléchissante $\mu$, le faisceau cylindrique tout entier reviendra sensiblement sur lui-même et par suite retournera converger en G. Il semble que pour l'œil placé dans le voisinage de G et regardant la surface $\mu$, celle-ci doive paraître uniformément lumineuse; en réalité, cette surface semble couverte d'une succession de lignes estompées généralement courbes et alternativement brillantes et obscures. Ces apparences s'expliquent sans difficulté si l'on admet l'interférence des rayons qui se réfléchissent aux deux surfaces de la lame d'air ABCDEF. En effet, par le point de contact E des deux surfaces $\mu$ et $\nu$, menons une normale à $\nu$, par cette normale menons des plans dans toutes les directions, et soit DEF l'intersection d'un de ces plans avec la surface $\mu$. Marquons sur la courbe DEF, à partir de E et des deux côtés, une série de points H, J, K, L, M, N, etc., déterminés par la condition que leurs distances à la surface $\nu$ soient : pour H et L, $\frac{\lambda}{4}$, pour J et M, $\frac{2\lambda}{4}$, pour K et N, $\frac{3\lambda}{4}$, etc.

En E, les deux faisceaux interférents n'ont d'autre différence de marche que celle qui provient de la réflexion contre un milieu plus réfringent, soit $\frac{\lambda}{2}$ ; le point E n'envoie donc pas de rayons dans le faisceau de retour; il en sera de même en J et M, où la différence de marche est $\frac{3\lambda}{2}$. Les points H et L, K et N, au contraire, donnant lieu à des différences de marche $\frac{2\lambda}{2}$ et $\frac{4\lambda}{2}$, donneront un maximum de lumière; les mêmes raisonnements s'appliquent à toutes les courbes tracées par le point E sur la surface $\mu$. L'ensemble de tous les points qui donnent un maximum ou un minimum de même ordre, formera une courbe sur la surface $\mu$; si l'on remarque d'ailleurs que l'intensité lumineuse passe du maximum au minimum par une série continue de valeurs intermédiaires, on comprend que pour l'œil placé en G et visant la surface $\mu$, les choses se passent comme si cette surface était réellement couverte d'une série de lignes estompées alternativement obscures et brillantes. Ces lignes qui, lorsqu'elles sont circulaires, constituent les anneaux de Newton, sont désignées sous le nom générique de franges; dans les mesures, on

considère généralement le milieu des franges noires; dans toute la suite, nous emploierons le mot frange dans cette acception particulière.

Supposons maintenant que par un moyen quelconque la lentille ABC, se déplaçant parallèlement à elle-même, s'éloigne de la surface $\mu$. Quand la distance du point E à la surface AB sera devenue $\frac{\lambda}{4}$, le point E sera devenu un point donnant lieu à un maximum; d'ailleurs, les distances de tous les points de la surface $\mu$ à la lentille ayant varié de la même quantité $\frac{\lambda}{4}$, on voit que la surface $\mu$ présentera une nouvelle apparence exactement complémentaire de la précédente.

Continuons le mouvement jusqu'à atteindre pour E une distance $\frac{\lambda}{2}$; nous retrouverons la même apparence qu'avant tout déplacement; une nouvelle tache noire aura apparu au centre, tandis qu'une frange aura disparu sur les bords. Réciproquement et en général, si le centre est redevenu noir $n$ fois, la distance relative des deux surfaces aura augmenté de $n\frac{\lambda}{2}$.

Ce nombre $n$ constitue une première mesure du déplacement relatif de deux surfaces réfléchissantes, mesure déjà assez précise, car, si l'on adopte la lumière monochromatique de la soude, $\frac{\lambda}{2} = 0^{mm},000295$; on apprécie, en réalité, la moitié de cette quantité, soit environ $^1/_{7000}$ de millimètre. Mais on peut aller plus loin. Nous venons de voir qu'un accroissement $\frac{\lambda}{2}$ de la distance des surfaces déplace les franges d'un rang; il est évident qu'une variation de distance valant une fraction $\mu$ de $\frac{\lambda}{2}$, donnera un déplacement d'une fraction $\mu$ de rang. L'observation de déplacements fractionnaires exige des repères. Un certain nombre de points sont gravés sur la surface plane de la lentille. Supposons que l'un de ces points A se trouve entre les franges de rang 4 et 5, par exemple; l'œil subdivise aisément en dix parties égales l'intervalle CB des deux franges; on exprimera la distance AC en dixièmes de l'intervalle CB, et l'on cotera, par exemple, le point A : A : 4,7.


Fig. 2.

Si l'on cote de nouveau le même point après un déplacement des franges, on voit immédiatement que la différence des résul-

tats exprimera le déplacement survenu à l'approximation de $^1/_{10}$ de frange; au lieu de prendre un seul point, M. Fizeau en prend une dizaine et accepte pour valeur du déplacement la moyenne des différences de cotes des dix points. On peut d'ailleurs substituer à la moyenne des différences de cotes la différence des deux moyennes que l'on obtient en divisant par 10 la somme des cotes des dix points. Ces dernières moyennes ont reçu le nom de *pointé moyen*. M. Fizeau est arrivé ainsi à rendre sensible une variation de distance égale à $\frac{\lambda}{40}$, soit pour la lumière de la soude $^1/_{70,000}$ de millimètre.

Il reste à montrer le dispositif employé pour transformer le mouvement produit par la dilatation en un déplacement relatif de deux surfaces réfléchissantes. Un disque métallique épais porte en trois points équidistants de son contour des appendices, dans chacun desquels a été taillé un écrou qui reçoit une vis du même métal que le disque, et d'un pas très fin (environ $^1/_4$ de millimètre). Ces vis peuvent saillir de quantités variables au-dessus du disque et portent par leurs pointes mousses une lentille plan-convexe de 40 centimètres de distance focale. Entre les vis, on pose sur le disque la substance à étudier, taillée en forme de lame à faces parallèles, et que nous supposons réfléchissante.

Les franges se produisent par l'interférence des rayons qui se réfléchissent sur la surface supérieure de l'objet et sur la surface plane de la lentille. La manœuvre des vis amène facilement ces deux surfaces à la distance convenable. Ce trépied ainsi réglé est placé dans une étuve à double paroi, chauffée au moyen d'une lampe.

Si le trépied ne se dilatait pas, le déplacement des franges mesurerait la dilatation de la substance à étudier; ce que l'on mesure en réalité, c'est la différence entre la dilatation du cristal et la dilatation des vis; il faut de toute nécessité mesurer cette seconde quantité; on y parvient en soulevant la lentille à l'aide des vis à 10 ou 12 millimètres au-dessus de la surface polie du disque et en observant le déplacement des franges dues à l'interférence à grande différence de marche des rayons réfléchis aux deux surfaces de la lame d'air ainsi produite. M. Fizeau a

appliqué cette méthode à l'étude d'un grand nombre de corps solides et de cristaux. A l'aide d'observations faites entre 10° et 70°, il a établi des formules qui donnent la dilatation en fonction de la température. En généralisant ces formules et les appliquant en dehors de l'intervalle de température pour lequel elles ont été établies, il a reconnu que deux corps cristallisés, l'émeraude et le protoxyde de cuivre, présentent un maximum de densité, tous deux au voisinage de — 4°.

Les recherches de M. Fizeau ont été reprises récemment par M. Benoît, directeur adjoint au bureau international des poids et mesures; les résultats sont encore inédits. Toutefois, les nombres relatifs à quelques cristaux, notamment l'émeraude, ont été cités dans divers Mémoires de M. Dufet sur les indices de réfraction, Mémoires insérés au *Journal de physique* (juin 1884, septembre 1885 et novembre 1885). M. Benoît a retrouvé, à peu de chose près, les nombres de M. Fizeau.

Je me suis proposé de reprendre l'étude de la dilatation de l'émeraude et du protoxyde de cuivre; si l'on considère d'une part que la détermination d'un point singulier d'une courbe exige, pour être précise, des mesures faites de part et d'autre, et, d'autre part, que les dilatations à mesurer sont très petites, même pour la méthode des interférences, on comprendra que j'aie été amené aux deux problèmes que je vais traiter dans ce mémoire :

1° Rechercher le moyen de produire et de maintenir pendant plusieurs heures, dans une enceinte capable de recevoir le trépied de Fizeau, des températures variables à volonté entre la température ambiante et — 20° ou — 30°;

2° Rechercher une méthode d'enregistrement photographique du déplacement des franges d'interférence.

---

## CHAPITRE PREMIER.

### § I. — *Choix de la méthode frigorifique.*

Remarquons tout d'abord que la recherche d'un procédé frigorifique maniable et susceptible de réglage présente un intérêt général en dehors des recherches que nous avons en vue; en effet, le zéro est la température normale à peu près comme 760 millimètres est la pression normale; dès lors on a tout intérêt à ce que les diverses propriétés physiques, fonctions de la température, soient bien définies au voisinage de cette température normale, ce qui se fera d'autant mieux que les limites des observations seront plus éloignées de part et d'autre de zéro.

J'écarte d'abord comme moyens de production du froid les mélanges réfrigérants; il n'est pas facile d'atteindre avec précision par ces moyens une température assignée d'avance; il est encore beaucoup plus difficile de maintenir cette température constante pendant un temps un peu long, enfin, il me paraît impossible de réaliser l'homogénéité de température dans une enceinte quelque peu considérable. J'écarterai aussi, pour les recherches présentes, à cause des difficultés expérimentales, certaines méthodes qui ont l'avantage d'une grande puissance, je veux parler de l'évaporation de gaz liquéfiés, protoxyde d'azote, acide carbonique, etc.

Frappé de la facilité avec laquelle on congèle les gouttelettes d'eau sur le dé de l'hygromètre de Regnault, je me suis demandé si l'évaporation de l'éther sulfurique ne répondrait pas à mon but. J'ai fait une série d'essais afin d'expérimenter la puissance de ce moyen frigorifique.

Une boîte cylindrique de laiton reçoit le liquide volatil, environ 600 grammes. Le fond supérieur de la boîte porte trois tubes : A, B et C; A tube large de 20 millimètres fermé en bas et plongé dans l'éther, reçoit un thermomètre à longue tige construit pour ces recherches. Le tube B descend jusqu'au fond de



la boîte, se replie horizontalement et tourne en spirale; la partie horizontale porte une vingtaine de trous; enfin, le tube C met l'intérieur de l'appareil en communication avec l'atmosphère.

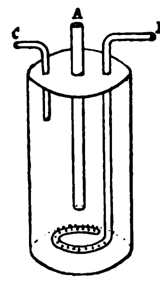



Fig. 3.

Trois moyens se présentent pour activer l'évaporation de l'éther : 1° injecter un courant d'air par B; 2° aspirer par C à travers le liquide de l'air pris par B, enfin 3° fermer B et faire le vide par C. Des circonstances purement locales ne m'ont pas permis d'appliquer la première méthode; pour expérimenter les deux autres, je me suis servi d'une trompe aspirante actionnée par une conduite d'eau à la pression de 8 à 10 mètres.

*Aspiration d'air à travers le liquide.* — Un premier essai où l'appareil était exposé sans enveloppes à l'air du laboratoire, n'a donné qu'un abaissement de température insignifiant, ce résultat n'était que naturel; la puissance des moyens frigorifiques étant hors de proportion avec les procédés de chauffage, l'influence du rayonnement devait se faire sentir avec une intensité inaccoutumée. Les expériences ont été reprises avec un appareil soigneusement protégé par une épaisse couche de coton et de drap, immédiatement la température a pu être abaissée à 9°,5 sous zéro.

Voici d'ailleurs la marche de cet essai :

| Temps. | Température. | Poids d'éther. | Dépense. |
|---|---|---|---|
| 3h30 | 17 | 580 gr. | |
| 4h | 5 | 497 » | 83 gr. |
| 4h30 | — 2°8 | 435 » | 62 » |
| 5h | — 6°6 | 415 » | 20 » |
| 6h | — 9°5 | 382 » | 33 » |

Pour connaître à un moment donné la quantité d'éther restée, il suffisait d'avoir la hauteur du liquide dans le vase; cette hauteur s'obtenait immédiatement en mesurant au moyen d'un manomètre à éther, la différence de pression qui devait exister dans le vase pour que le courant d'air traversât le liquide. Les hauteurs initiales et finales étant connues ont donné de l'exactitude de ce procédé une vérification d'ailleurs superflue.

J'ai cherché à combattre plus efficacement encore le réchauffement par l'air ambiant; l'appareil enveloppé comme précédemment a été placé au centre d'une cuve annulaire contenant 5 à 6 litres d'eau refroidie vers zéro par l'addition de 2 kilos de glace; c'était créer autour de l'appareil une atmosphère artificielle voisine de zéro; le résultat ne s'est pas fait attendre, le thermomètre est descendu de + 18° à — 17°.

A la rigueur, cette limite suffisait aux recherches que j'avais en vue. Mais il n'était pas douteux que l'on pût aller plus loin, car le courant d'air dont je disposais était manifestement faible; le débit d'air de la trompe, mesuré en recueillant les bulles dans un ballon jaugé ne dépassait pas 1 litre 250 c. c. par minute.

Je citerai seulement pour mémoire quelques essais tentés en faisant le vide sur l'éther; je n'ai pu de la sorte descendre à plus de 10° sous zéro; je n'ai pas insisté sur cette méthode, ayant des raisons *à priori* de lui préférer les autres : l'aspiration ou l'injection d'air ne produisent dans l'intérieur de l'appareil qu'une faible différence de pression, ce qui facilite beaucoup la construction et le maniement des étuves.

## § II. — *Maintien et réglage de la température.*

La question me paraissant résolue, quant à la puissance de la méthode, il restait à examiner le réglage. Et d'abord une telle méthode est susceptible d'un réglage délicat; en effet, l'agent producteur du froid étant débité par une conduite tout comme le gaz d'éclairage, il est évident que les mêmes moyens régulateurs s'appliquent sans difficulté. Toutefois, avant d'entrer dans cette voie délicate, j'ai voulu savoir quel degré de constance on pouvait attendre du seul réglage du robinet de la trompe : voici les observations recueillies :

| Temps. | Température. |
|---|---|
| 1h | 11°9 |
| 4h40 | 11°6 |
| 12h30 | 3°7 |
| 1h40 | 3° |



Cette constance suffirait à bien des recherches ; elle ne suffit pas pour l'appareil Fizeau, car non seulement les corps dont on étudie la dilatation ne se refroidissent que par rayonnement, mais encore il faut réaliser l'équilibre de température entre des corps de pouvoirs conducteurs très différents ; disons tout de suite, qu'il existe des régulateurs à l'aide desquels une enceinte peut être maintenue pendant de longues heures à une température presque rigoureusement constante. Tous les régulateurs qu'on rencontre dans les laboratoires sont fondés sur la dilatabilité d'un corps ; naturellement on choisit un des corps les plus dilatables, généralement l'air atmosphérique. Les régulateurs présentent des formes très diverses, on y trouve toujours un espace fermé AB rempli d'air, la dilatation de cet air refoule du mercure.

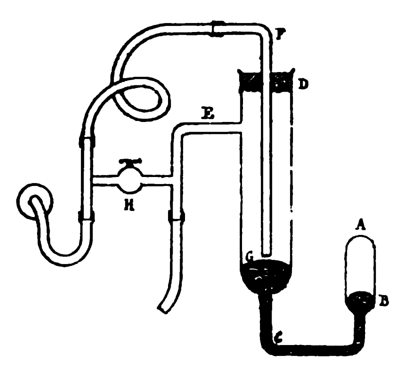


Fig. 4.

Le gaz d'éclairage avant de se rendre à la lampe par le canal E passe dans un tube FG concentrique à CD et dont l'extrémité G taillée en biseau se trouve plus ou moins obturée d'après la hauteur du mercure. La lampe communique, d'ailleurs, directement avec la prise de gaz au moyen d'un embranchement H muni d'un robinet. Cette disposition a pour but d'assurer à la lampe un débit de gaz suffisant pour prévenir l'extinction.

Le réglage et le fonctionnement de ces appareils se comprend aisément. Les régulateurs dont je viens d'exposer le principe sont sujets à deux causes de perturbation : les variations de pression du gaz et les variations de la pression atmosphérique : examinons l'importance de ces défauts. L'amplitude des variations de pression du gaz peut atteindre 4 centimètres d'eau, soit 3 millimètres de mercure ou $^1/_{250}$ d'atmosphère. Le volume de la chambre d'air pourra donc varier de ce chef de $^1/_{250}$, ce qui correspond à une variation de température $\Delta t$ donnée par la relation

$$0.00366 \times \Delta t = 0.004, \quad \text{d'où} \quad \Delta t = 1°1.$$



Le même calcul montre que chaque variation de 3 millimètres de la pression barométrique entraîne une variation de température de plus de 1°. Remarquons que ces défauts sont sans remède et dérivent du principe même de la méthode.

Un physicien allemand, M. Andreae (*), a fait connaître en 1878 un régulateur qui surpasse incomparablement tous ses devanciers. Dans cet appareil, la fonction régulatrice de la température n'est plus un volume, mais la tension maximum d'une vapeur saturée; il suffit de se rappeler l'allure des courbes qui représentent cette tension maximum pour comprendre que l'appareil de M. Andreae permet d'atteindre une sensibilité presque illimitée.

Voici d'une manière générale la construction et le fonctionnement d'un régulateur à tension de vapeur : Dans l'enceinte soumise au réglage se place un tube de verre AB, large de 15 à 20 millimètres. Ce réservoir soudé à un tube plus étroit BG se relie par un long caoutchouc GC à un interrupteur de gaz analogue à ceux des régulateurs précédents. Cet interrupteur est fixé sur une planchette mobile dans une coulisse verticale graduée. L'appareil est rempli de mercure depuis le niveau H jusqu'au niveau E, voisin du sommet A. Avant de fermer le tube AB à la lampe, on y a introduit quelques gouttes du liquide volatil dont on utilise la tension de vapeur. Veut-on réaliser une température donnée *t*, on dispose la planchette mobile de façon que la différence de niveau EH représente la tension maximum à *t*° de la vapeur employée; l'orifice *o* étant ouvert, l'échauffement de l'étuve se produit dès que la température *t* est dépassée, le mercure monte en H et ferme l'orifice *o*; le refroidissement commence, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'après quelques oscillations il s'éta-

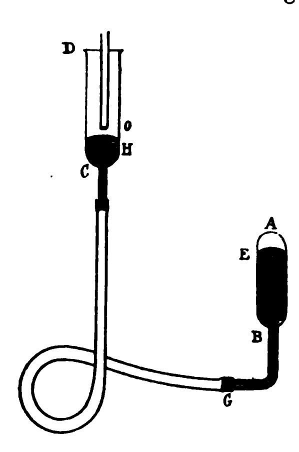


Fig. 5.

(*) *Annales de Wiedemann*, nouvelle série, t. IV, p. 614.

blisse un régime permanent où l'étuve recevant autant de chaleur qu'elle en perd, la température demeure stationnaire. Je ne crois pas inutile de rapporter ici un premier essai que j'ai fait de ces nouveaux régulateurs, essai qui met bien en lumière l'excellence de la méthode. Il s'agissait de régler la température d'un appareil d'incubation artificielle. Le problème se présentait dans des conditions relativement simples. Il suffisait de pouvoir réaliser et maintenir des températures variant entre 38° et 45°. J'adoptai comme liquide volatil un mélange de neuf parties d'éther et une partie d'alcool, mélange dont le point d'ébulitition est voisin de 38°. Le régulateur fut construit entièrement en tubes de verre. Le réservoir chambre de vapeur AB est soudé concentriquement sur le tube CD qui se rend à l'interrupteur DE. Celui-ci formé d'un tube de 30 centimètres de long se termine par un goulot qui reçoit un bouchon dans lequel glisse à frottement doux le tube FG dont l'extrémité est taillée en biseau. La figure ci-jointe fait suffisamment comprendre l'ensemble de l'appareil. En réglant le tirage du tube GF et la quantité de mercure, on fixe la limite à partir de laquelle le réglage se produit. Le remplissage se fait sans peine; l'appareil étant tenu dans sa position normale, on introduit le liquide par le goulot; renversant alors l'instrument on fait passer l'éther en A et l'on chauffe doucement cette partie; quand les vapeurs formées ont entraîné tout l'air, on retourne brusquement l'appareil et l'on introduit rapidement le mercure qui s'élève dans l'espace annulaire en refoulant la vapeur condensée.

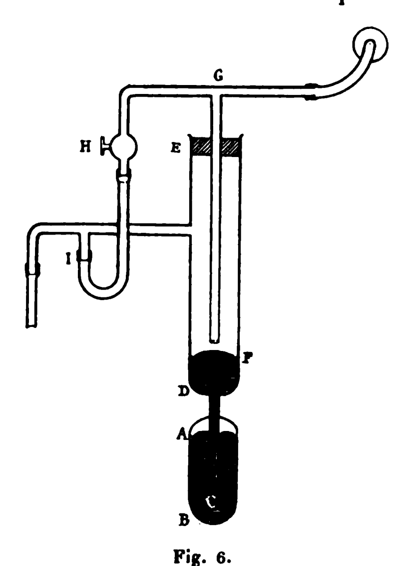


Fig. 6.

Les résultats obtenus à l'aide de ce régulateur dépassèrent

mon attente, en dépit des variations de pression du gaz, en dépit d'un chauffage plus que modéré du local, le thermomètre de l'étuve consulté fréquemment parut complètement stationnaire pendant plusieurs jours.

Il faut remarquer que nous opérons ici à la limite inférieure de sensibilité de ces appareils; on sait, en effet, que les tensions de vapeur croissent d'autant plus rapidement qu'on est plus éloigné du point d'ébullition normale. Si nous prenons par exemple l'éther, nous trouvons pour tensions :

| | | | |
|---|---|---|---|
| à 35° | 763 | millim. | de mercure. |
| à 40° | 909 | » | » |
| à 50° | 1271 | » | » |
| à 55° | 1484 | » | » |
| à 75° | 2647 | » | » |
| à 80° | 3024 | » | » |

Il résulte de ce tableau que dans un régulateur à vapeur d'éther le degré de température serait représenté :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| à 35° | par | 29 | millim. | de mercure. |
| à 50° | » | 43 | » | » |
| à 75° | » | 75 | » | » |

On voit immédiatement que les variations de pression du gaz deviennent entièrement négligeables et que même au bas de l'échelle de sensibilité, dans le voisinage du point d'ébullition, les variations de pression barométrique influeront dix fois moins que dans le cas des régulateurs à dilatation d'air.

Je me décidai à construire un régulateur à grande course pour mon étuve refroidie. Comme il était à présumer que je réaliserais une température inférieure à — 20°, il fallait un liquide bouillant au voisinage de cette température. On trouve dans ces conditions le cyanogène, l'oxyde de méthyle, le chlorure de méthyle, j'ai choisi ce dernier.

Un liquide bouillant à — 22° devait donner à la température ambiante de 15° une tension de près de quatre atmosphères. J'ai choisi en conséquence un tube de caoutchouc à petite section intérieure et à paroi épaisse et je l'ai entouré d'un fort ruban de



toile tourné en spirale et solidement fixé. Une expérience préalable a été faite avec de l'air comprimé. Un petit réservoir de verre où avait été emprisonné un volume d'air a été relié au tube de caoutchouc, celui-ci ayant été rempli de mercure et son extrémité libre fixée sur un bout de tube porté à 3 mètres de hauteur, l'air s'est trouvé comprimé à cinq atmosphères. Au bout de deux ou trois jours le caoutchouc avait atteint sa distension maximum et le mercure n'a plus bougé durant plusieurs semaines.

L'appareil construit, il reste à introduire le liquide volatil : voici le détail de cette opération.

Un tube AB de 15 millimètres de diamètre et 30 centimètres de long se relie par un tube plus étroit BC au caoutchouc que termine un robinet de verre sur lequel on soudera ultérieurement l'interrupteur. On introduit du mercure qui s'élève jusqu'au milieu de AB. On refroidira maintenant le tube AB au-dessous de — 30°, on y fera arriver un courant de gaz chlorure de méthyle qui se liquéfiera; enfin, on fermera l'extrémité A au chalumeau.

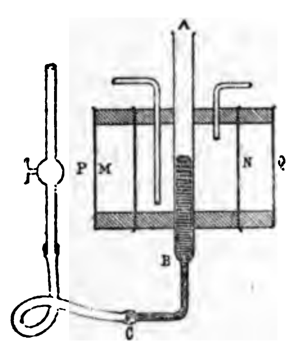


Fig. 7.

α. — *Refroidissement du tube* AB. — Le tube AB est placé au centre d'un manchon de verre MN fermé par deux bouchons; le bouchon supérieur porte un tube de fond et un tube de dégagement. Un second manchon de verre PQ entoure le premier et le soustrait du moins partiellement au réchauffement par l'air ambiant. On prépare alors 50 à 60 centimètres cubes d'anhydride sulfureux liquide. J'ai employé la méthode ordinaire des laboratoires. Le gaz sulfureux produit par la décomposition de l'acide sulfurique au moyen du cuivre et desséché par son passage à travers deux flacons d'acide sulfurique vient se condenser dans un récipient refroidi à — 20° par un mélange de glace et de sel marin. En refroidissant le dernier flacon laveur au voisinage de zéro, et en plaçant dans le réfrigérant deux réci-



pients consécutifs, j'ai pu obtenir en deux heures, à l'aide de 150 grammes de cuivre, 75 centimètres cubes d'anhydride liquide, soit les $^{3}/_{4}$ du rendement théorique.

L'anhydride liquide étant introduit dans le manchon MN, il suffit, à l'aide d'un petit soufflet, de chasser un courant d'air par le tube de fond pour obtenir un refroidissement considérable. Une expérience préalable où le tube AB était remplacé par un thermomètre à alcool, avait montré qu'on pouvait obtenir et maintenir sans peine une température de — 50°. L'opération actuelle demandant tout au plus — 36°, il suffisait de donner de temps en temps quelques coups de soufflet.

β. — *Liquéfaction du chlorure de méthyle* — Le tube AB est coiffé d'un tube de Durand dont la longue branche descend jusqu'au voisinage du mercure. On prépare le chlorure de méthyle en chauffant doucement un mélange de deux parties de sel marin, une partie d'alcool méthylique et trois parties d'acide sulfurique concentré. Le produit brut de la réaction est dirigé dans un flacon d'eau qui retient les impuretés : alcool méthylique, oxyde de méthyle, acide sulfureux. Ce passage à travers l'eau s'accorde difficilement avec la nécessité d'un courant de gaz sec. J'ai atténué le mal en refroidissant le flacon laveur à zéro; cet artifice ne pouvait qu'augmenter l'efficacité du laveur, puisque la solubilité des gaz augmente à froid, d'autre part, la tension de la vapeur d'eau se trouvait réduite à peu de chose. Aussi un tube à chlorure de calcium placé immédiatement avant le tube de Durand n'a-t-il présenté après l'opération que de légères traces d'humidité à l'entrée.

Au bout d'une demi-heure, une quantité suffisante de gaz étant condensée, on retire le tube de Durand et tandis qu'on refroidit énergiquement l'anhydride sulfureux, on ferme au chalumeau l'extrémité A. On relève le robinet de verre à 2 ou 3 mètres de hauteur, on ajoute du mercure, on laisse évaporer l'excédant d'anhydride. On retire enfin le tube AB du manchon, l'opération est terminée. L'appareil revenu à la température ambiante accuse une tension de vapeur de 290 centimètres de

mercure. Voici d'ailleurs les tensions de vapeur que j'ai trouvées à diverses températures :

| | | | |
|---|---|---|---|
| — 22° | 80 | centim. | de mercure. |
| — 20° | 87 | » | » |
| — 15° | 108 | » | » |
| — 10° | 134 | » | » |
| — 5° | 165 | » | » |
| 0° | 197 | » | » |
| + 5° | 236 | » | » |
| + 10° | 275 | » | » |
| + 15° | 315 | » | » |
| + 20° | 365 | » | » |

Nous n'avons encore qu'une partie de régulateur; il reste à établir une relation entre la hauteur du mercure et l'intensité du courant d'air producteur du froid. A la différence des régulateurs de chauffage, l'effort moteur du réglage doit être ici une contraction. J'ai adopté le dispositif suivant :

Le robinet de verre dont j'ai parlé plus haut est soudé à un tube de 10 à 12 millimètres de diamètre, le mercure de ce tube porte un flotteur du poids de 50 grammes environ. Ce flotteur actionne un levier dont l'autre branche formant pince avec une pièce fixe presse sur le tube de caoutchouc très flexible intercalé dans le tube adducteur d'air.

### § III. — *Application à l'appareil de Fizeau.*

Il me reste à faire connaître les appareils construits spécialement en vue de mes recherches de dilatations.

J'ai donné au réservoir d'éther et à ses enveloppes la forme annulaire, afin de pouvoir placer l'appareil producteur des franges directement sur la maçonnerie qui porte le tout. Un cylindre de cuivre rouge de 8 centimètres de diamètre sur 24 centimètres de hauteur, noirci intérieurement afin d'augmenter son pouvoir émissif, limite l'espace à refroidir. Ce cylindre est fermé à sa partie supérieure par une boîte de laiton CDEF, qui porte les thermomètres; des ouvertures fermées par des glaces permettent d'ailleurs le passage de la lumière. Le réservoir d'éther HGLK formant

couronne autour du premier cylindre sur une hauteur de 18 centimètres, peut recevoir 1 litre 500 c. c. de liquide. Une ouverture pratiquée dans le fond laisse passer le régulateur, tandis qu'une fenêtre percée dans la paroi permet de voir à chaque instant la position du mercure dans le tube. J'ai modifié l'enveloppe protectrice de la cuve d'éther; d'après les idées reçues, l'efficacité du coton, du feutre, etc., consiste en ce que ces matières empêchent les mouvements de l'air. Il semble dès lors qu'une couche d'air immobilisée par une boîte hermétiquement close doive former un excellent isolant thermique. Tout l'appareil de cuivre rouge se trouve à l'intérieur d'une boîte métallique polie MNOP. Cette boîte, fixée par ses fonds sur le cylindre central, en est isolée, au point de vue thermique, par l'interposition de carton d'amiante; enfin, les joints ainsi faits sont étanchés à la cire. Autour de la boîte MNOP pourra se placer la cuve annulaire d'eau refroidie vers zéro, comme je l'ai dit précédemment.

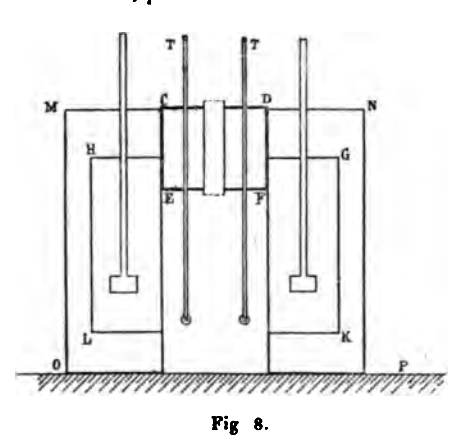


Fig 8.

L'ancien système producteur du courant d'air a été remplacé par des engins plus puissants. Un petit moteur à gaz, système Bisschop, de la force de $^1/_{10}$ de cheval, actionne, au moyen d'une bielle et d'une manivelle montée sur l'arbre, une pompe de compression dont chaque coup de piston introduit environ 250 centimètres cubes d'air, l'allure normale de la machine comportant 100 à 130 tours par minute, le débit d'air, dans le même temps, peut dépasser 25 litres. La pompe refoule l'air dans un réservoir. C'est une tourie de 35 litres dont le goulot a été coiffé d'une virole portant, outre les tubes d'entrée et de sortie, un tube relié à un manomètre à air libre à mercure et une soupape

à levier, qu'on peut charger d'un poids. Ce dispositif peut donner un courant d'air sensiblement constant et très puissant (beaucoup trop puissant pour les plus forts chalumeaux). Le courant d'air se règle par le poids de la soupape et se définit par la lecture du manomètre. Du réservoir, un tube se rend dans l'éther en passant par le caoutchouc flexible sur lequel agit le régulateur.

La manière d'introduire l'air dans le bain d'éther n'est pas indifférente; il ne faut pas oublier que la stabilité des appareils est une condition essentielle à la précision de mesures faites par la méthode délicate des interférences. Lors d'un essai où j'avais employé un tube percé de trous, tourné en spirale et reposant sur le fond de la boîte, le dégagement des bulles d'air donnait lieu à un ébranlement très faible, sans doute, mais suffisant pour produire une légère oscillation des franges; d'ailleurs, il est malaisé de régler le diamètre des trous d'un tube de manière à les faire fonctionner tous, condition essentielle à l'homogénéité de température du bain, surtout quand, par suite de l'entrée en fonction du régulateur, le courant faiblit.

Une boîte de la forme indiquée ci-contre, en laiton très mince, pesant moins de 50 grammes, est percée à sa partie supérieure de 150 trous de $^1/_2$ millimètre de diamètre. Le courant d'air est amené par deux tubes de cuivre A et B; ces deux tubes, soudés dans le fond supérieur du réservoir d'éther, fixent la boîte à air en réduisant au minimum son contact avec les parois.

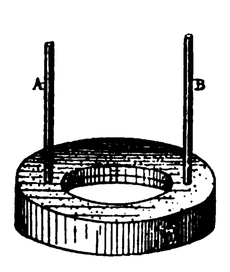


Fig. 9.

L'essai de ces nouveaux appareils a donné les meilleurs résultats. Voici les températures relevées au moyen d'un thermomètre placé à l'endroit même où se trouvera le trépied de Fizeau :

| Temps. | Température. |
|---|---|
| 10h10 | 15° |
| 10h15 | 10° |
| 10h25 | 0° |
| 10h34 | — 7°5 |

| Temps. | Température. |
|---|---|
| 10h40 | — 12°5 |
| 10h50 | — 17° |
| 11h00 | — 20° |
| 11h30 | — 24° |

Je ferai remarquer que ces observations ont été faites à la température ambiante de 15°, alors que le réservoir d'éther n'avait d'autre enveloppe protectrice que la couche d'air dont j'ai parlé. Contrairement aux prévisions, il semble que ce mode de protection ne soit pas bien efficace, car la paroi métallique extérieure s'est couverte d'une abondante rosée qui s'y est congelée en partie. Si l'on se rappelle que l'emploi de la cuve d'eau refroidie a permis de gagner 8 degrés, on ne trouvera pas exagéré d'assigner — 30° pour limite de puissance de l'appareil. Je me propose d'appliquer au refroidissement de la cuve d'eau un artifice analogue à la chemise de vapeur de Watt. Lors de la dernière expérience que je viens de citer, le mélange d'air et de vapeur d'éther était conduit hors du laboratoire par un long tube métallique; ce tube s'est considérablement refroidi et même sur plus d'un mètre de longueur s'est couvert d'une épaisse couche de givre. Il suffira de tourner ce tube en spirale et de le placer dans la cuve d'eau pour refroidir notablement celle-ci. En substituant ainsi à la glace du froid qui se trouvait perdu, j'augmente évidemment le rendement de l'appareil.

La limite atteinte par le refroidissement m'oblige à revenir un instant au réglage; le régulateur à chlorure de méthyle, dont j'ai donné la construction, ne peut pas fonctionner avec grande sensibilité au-dessous de — 15°; je me propose de construire un second régulateur où le liquide volatil sera du gaz ammoniaque liquéfié, liquide qui bout vers — 34°. La tension de vapeur de l'ammoniaque est, d'après Regnault, à la température de 15° environ 7.3 atmosphères. J'ai pu trouver dans le commerce des tubes de caoutchouc épais entourés de deux plis de toile et résistant sans peine à la pression de 10 atmosphères. Dès lors, le problème est résolu. Le remplissage s'effectuera sans difficulté par la méthode que j'ai employée précédemment, puisque j'ai pu obtenir — 50°.

## CHAPITRE SECOND.

J'aborde maintenant le second problème, l'enregistrement photographique du déplacement des franges d'interférence. Et d'abord, si un tel mode d'observation existe, il est facile de voir qu'il permet d'atteindre une précision plus grande. En effet, d'une part, la longueur d'onde des rayons actiniques est notablement inférieure à celle des rayons monochromatiques visibles, tels que les raies du lithium, du sodium ou du thallium ; d'autre part, l'image rétinienne des franges étant remplacée par un cliché photographique, au lieu de repérer les franges à l'œil, au dixième près, on pourra faire et refaire à loisir des relevés micrométriques. En résumé, l'unité de mesure sera plus petite et l'on pourra en apprécier une bien moindre fraction.

Il n'existe pas à la vérité de rayons chimiques monogènes, mais il est des radiations qui, dans certaines conditions, peuvent en tenir lieu. Si l'on fait jaillir l'étincelle électrique d'induction entre deux électrodes de magnésium, qu'on décompose par le prisme la lumière émise et qu'enfin on étudie le spectre formé dans sa partie actinique, on trouve d'abord une raie d'une intensité considérable. C'est une raie quadruple de longueur d'onde moyenne $0^{mm},0002794$ (*).

Malheureusement, cette radiation est entièrement absorbée par le verre et il faut pour l'étudier des appareils de quartz, spath d'Islande, etc. Si l'on prolonge le temps de pose, on voit apparaître une seconde raie de longueur d'onde $0^{mm},000383$, raie bien inférieure à la précédente, mais cependant douée encore d'un grand éclat et observable au moyen des verres ordinaires d'optique. Les autres raies actiniques du magnésium sont notablement plus faibles et n'apparaissent qu'au bout d'un temps de pose beaucoup plus considérable. Ces données ont servi de

---

(*) CORNU, *Détermination des longueurs d'onde des radiations très réfrangibles du magnésium, etc.* (ARCHIVES DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES. Troisième période, t. II, n° 7.)

base aux recherches que je vais rapporter. Je diviserai cette étude en trois parties :

1° Production et repérage des franges; 2° éclairage au magnésium et enregistrement photographique; 3° relevé micrométrique, sensibilité de la méthode.

## § I. — *Production et repérage des franges.*

Lors de ces essais, je ne disposais pas d'un trépied; j'ai employé le dispositif suivant : une lame d'obsidienne est couverte sur les bords d'une mince couche de collodion; sur cette pellicule repose la lentille plan-convexe; en tournant la lentille et usant légèrement le collodion on parvient aisément, quand on a un peu l'habitude de ces recherches, à produire des franges bien étalées. Afin d'augmenter l'éclat du phénomène d'interférence, il y a intérêt à se servir d'une lame d'air aussi mince que possible; d'autre part, si l'on veut obtenir des résultats susceptibles d'application, il faut bien laisser un espace suffisant au jeu de la dilatation. Si l'on veut tenir compte à la fois de ces deux nécessités contradictoires, il devient indispensable de mesurer avec une certaine précision l'épaisseur de la lame d'air. Il serait bien difficile d'appliquer ici le sphéromètre, je me suis servi d'une méthode optique très simple et en même temps très précise.

La plaque d'obsidienne portant la lentille est placée sur le chariot mobile de la machine à diviser. Au foyer principal de la lentille, on place une source de lumière monochromatique de longueur d'onde connue $\lambda$. On amène au contact le prisme éclaireur et son image conjuguée formée dans le plan focal principal de la lentille; cette condition témoigne, quand elle est réalisée, que les rayons interférents se réfléchissent sous l'incidence normale. On note la position des franges par rapport aux repères. Faisant tourner la vis de la machine, déplaçons latéralement le système producteur des franges et suivons l'image en déplaçant l'œil dans le plan focal, nous verrons se produire un mouvement continu des franges par rapport aux repères, mouvement d'autant plus lent que l'épaisseur de la lame d'air est moindre. Arrêtons après un

déplacement de $n$ franges. Connaissant la distance focale $\varphi$ de la lentille et la course $l$ du chariot de la machine, on calcule sans peine l'épaisseur $e$ de la lame d'air.

En effet, les rayons interférents ont passé de l'incidence normale à l'incidence oblique; soit $\alpha$ la variation angulaire d'incidence, nous avons observé une variation de différence de marche de $n\lambda$, on aura donc :

$$e(1 - \cos\alpha) = n\frac{\lambda}{2},$$

d'autre part

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{l}{\varphi}$$

d'où

$$e\left(1 - \sqrt{\frac{\varphi^2}{e^2 + \varphi^2}}\right) = n\frac{\lambda}{2}$$

$$e = \frac{n\frac{\lambda}{2}}{1 - \sqrt{\frac{\varphi^2}{e^2 + \varphi^2}}}$$

tout est connu au second membre.

En employant cette méthode, j'ai trouvé pour l'épaisseur de la lame d'air dont je me servais $e = 0^{mm},009$.

J'ai modifié le système de repérage des franges en vue du relevé micrométrique des clichés. Les points de M. Fizeau ont presque toujours des dimensions gênantes, surtout avec des franges un peu serrées qu'on examine au microscope. J'y ai substitué un réseau à mailles rectangulaires gravé à l'acide fluorhydrique. J'ai pu réaliser des lignes très fines; d'ailleurs on gagne en précision vu que chaque point de repère, étant le croisement de deux lignes, se trouve déterminé par deux mesures au lieu d'une.

Pour exécuter la gravure, je me suis servi d'abord d'acide fluorhydrique en solution dans l'eau; je prépare un vernis très fluide composé de bitume de Judée en solution dans la térébenthine, et je l'étends sur la surface à graver à la façon du collodion

photographique, ce qui donne une couche très mince et très régulière. Je trace maintenant le quadrillage au burin de la machine à diviser, le verre ayant été mis à nu, je passe rapidement à la surface un tampon de coton imbibé de la solution d'acide fluorhydrique. On lave à grande eau, on dissout l'excédent de vernis et la gravure est terminée. J'ai obtenu de la sorte des lignes d'une grande pureté et dont l'épaisseur ne dépasse pas $0^{mm},05$. Mais ici se présente une difficulté. Comme il était naturel de le faire, j'avais exécuté la gravure sur la face plane de la lentille; malgré la finesse des traits, les franges coupées de la façon la plus malencontreuse ne présentaient plus qu'une série de points de rebroussement. J'exécutai alors la gravure sur la face convexe, mais on tombe ainsi dans une autre difficulté peu sérieuse, il est vrai : pour peu que l'incidence ne soit pas rigoureusement normale, l'examen microscopique des clichés révèle que certaines lignes sont dédoublées.

J'ai tout récemment pu éviter tous les inconvénients en employant l'acide fluorhydrique gazeux; tandis que la solution aqueuse semble creuser une veritable rigole dans le verre, l'acide gazeux se contente de dépolir; les franges sont interrompues net et la gravure s'exécute sans inconvénient sur la face plane.

## § II. — *Éclairage au magnésium et enregistrement photographique.*

Je me sers d'une bobine de Ruhmkorff de dimensions moyennes; actionnée par cinq éléments Bunsen de 20 centimètres de hauteur, ce qui donne un courant inducteur de 10 ampères environ, elle donne avec le trembleur de Neef des étincelles de 70 à 80 millimètres. La bobine est employée à charger un condensateur. J'emploie comme condensateurs des matras de verre mince tels qu'on les trouve dans les laboratoires de chimie; l'armature intérieure est constituée par de l'acide sulfurique dans lequel plonge une lame de plomb qui traverse le bouchon. L'armature extérieure est du papier d'étain

collé sur le verre. L'appareil est placé dans une cuvette en zinc enduite de paraffine, ce qui a le double avantage d'isoler l'armature extérieure et d'empêcher le liquide corrosif de se répandre en cas de rupture du vase. J'ai préparé une série de ces condensateurs avec des ballons variant de 250 cc. à 2 litres afin de choisir expérimentalement celui qui donne les meilleurs résultats. Enfin la décharge du condensateur éclate entre deux électrodes de magnésium qu'une monture à coulisse permet d'amener à la distance convenable.

J'aborde la disposition d'ensemble des appareils. Il y a intérêt afin d'augmenter l'intensité de l'éclairage à placer l'étincelle le plus près possible de l'appareil d'interférence. Mais il faut bien laisser la place nécessaire pour l'étuve froide et ses enveloppes. J'ai adopté une distance de 24 centimètres. L'étincelle est donc placée dans le voisinage de l'axe principal de la lentille et à 24 centimètres de la face convexe de celle-ci. A quelques centimètres plus haut se trouve un miroir plan argenté par la méthode de Foucault; les rayons partis de l'étincelle viennent, après s'être réfléchis aux deux surfaces de la lame d'air, rencontrer ce miroir plan incliné à 45° et qui les renvoie dans l'appareil photographique. Celui-ci se compose d'un objectif de Steinheil de 25 millimètres d'ouverture et d'une chambre noire dont le tirage muni d'une graduation permet la recherche du foyer chimique.

La position de l'appareil photographique détermine la grandeur de l'image des franges. Afin d'augmenter l'intensité lumineuse et de réduire ainsi le temps de pose, il est avantageux de réduire beaucoup les dimensions de cette image et d'examiner les petits clichés au microscope. J'ai adopté une réduction voisine de $^1/_3$, ce qui donne pour la distance de l'objectif photographique, en passant par le miroir à 45°, 60 centimètres.

Calculons maintenant la longueur focale $f$ qu'il convient de donner à la lentille de l'appareil d'interférence.

Afin de faciliter le réglage et surtout d'assurer le concours de *tout* le faisceau de retour à la production de l'image sur la plaque sensible, il faut que l'image conjuguée de l'étincelle par rap-

port au système optique formé par la lentille plan-convexe et la surface réfléchissante plane du cristal, se forme dans le voisinage de l'objectif photographique. On démontre sans peine que l'ensemble d'une lentille convergente de foyer $f$ et d'un miroir plan normal à l'axe principal de la lentille et appliqué immédiatement contre celle-ci, est équivalent à un miroir sphérique concave de longueur focale $\frac{f}{2}$.

Dans la formule :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{\frac{f}{2}}$$

faisons

$$p=24 \quad \text{et} \quad p'=60.$$

Nous trouvons $f=34$. La longueur focale ne devra donc pas dépasser 34 centimètres.

Il est une autre considération plus importante dont nous devons tenir compte dans le choix de la longueur $f$. Nous avons dit que l'étincelle était placée à 24 centimètres de la lentille, elle ne se trouvera donc pas au foyer principal. Il résulte de là que les rayons qui doivent interférer ne formeront plus à leur arrivée sur les surfaces réfléchissantes un faisceau parallèle mais divergent, l'obliquité d'incidence croîtra du centre des franges aux bords. L'étendue du champ dans lequel on observe les franges ne dépasse pas en général 3 centimètres en diamètre ou 1.5 en rayon.

Calculons en fonction de la longueur focale $f$, pour une lame d'air d'épaisseur $e=0^{mm},01$, la variation de différence de marche quand on passe du centre à une distance 1.5 centimètres. Posons alors la condition que cette variation soit égale à $\frac{2}{500}$ de $\frac{\lambda}{2}$ et cherchons la valeur correspondante de $f$.

Si l'on représente par $\beta$ la variation angulaire d'incidence quand on passe ainsi du centre à une distance 1.5 centimètres, on a

$$\tan\beta=\frac{1.5}{p'}.$$



$p'$ étant la distance de l'image conjuguée de l'étincelle par rapport à la lentille, à la lentille elle-même.

Si nous prenons la formule des lentilles convergentes

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = -\frac{1}{f},$$

nous trouvons

$$\operatorname{tang} \beta = 1.5 \times \frac{f - 24}{24f}.$$

D'autre part, si nous représentons par $\mu$ la variation de différence de marche en franges, nous aurons :

$$e\,(1 - \cos \beta) = \mu \frac{\lambda}{2};$$

ici

$$e = 0^{m},01, \quad \lambda = 0^{mm},000383$$

ou sensiblement

$$\frac{\lambda}{2} = 0^{mm},002;$$

faisons

$$\mu = \frac{2}{500} \quad \text{ou} \quad 0.004,$$

il vient

$$1 - \cos \beta = \frac{0.002 \times 0.0004}{0.01} = 0.00008$$

$$\cos \beta = 0.9992 \quad \text{d'où} \quad \beta = 44'$$

$$\operatorname{tang} \beta = 0.013 \quad \text{donc} \quad 0.013 = 1.5 \times \frac{f - 24}{24f}$$

et finalement $f = 30$ centimètres.

J'ai adopté pour $f$ 32 centimètres, ce qui correspond sensiblement au n° 12 des opticiens.

J'ai dit antérieurement et d'une manière un peu vague que l'étincelle était placée *dans le voisinage* de l'axe principal de la lentille ; je reviens maintenant sur cette circonstance qui peut donner lieu à une correction d'une certaine importance.

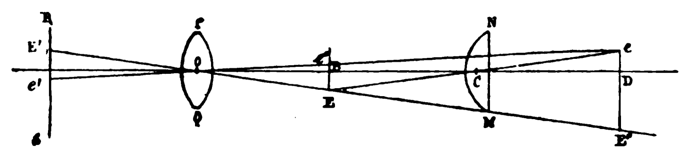
On observe sur tous les clichés deux images de l'étincelle, la

première large et estompée (elle n'est pas au point), et très intense est l'image directe donnée par l'objectif photographique; la seconde beaucoup plus petite et située sensiblement au milieu de l'image des franges est la photographie de l'image virtuelle que donne de l'étincelle la face convexe de la lentille d'interférence. On comprend, *à priori*, que la coïncidence de ces deux images sur le cliché indiquerait que l'étincelle se trouve sur l'axe principal de la lentille. Dans la pratique cette coïncidence ne peut être réalisée par la raison que les électrodes masqueraient les franges. Tout ce que l'on peut faire, c'est de rendre l'image directe de l'étincelle tangente à l'image circulaire du champ couvert de franges. C'est toujours ainsi que je règle mon appareil.

Je vais montrer maintenant que mesurant sur le cliché la distance des deux images dont j'ai parlé, on calcule aisément l'obliquité d'incidence du pinceau central dans le faisceau interférent.

Faisons abstraction du miroir incliné à 45° et supposons la lentille d'interférence MN directement centrée sur l'objectif photographique PQ.

Soient RS le verre dépoli de l'appareil photographique E' et *e'* la grande et la petite image, E l'étincelle *e* son image virtuelle donnée par la face convexe de MN. Le reste de la figure se comprend aisément.




Calculons d'abord la valeur du rapport $\frac{EB}{eD} = \frac{BC}{CD}$.

Appliquons la formule des miroirs convexes

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = -\frac{2}{R}$$

d'où l'on tire en valeur absolue

$$\frac{p}{p'} = 1 + \frac{2p}{R}.$$

Pour une lentille plan-convexe de 32 centimètres de foyer la relation

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)$$

nous donne

$$R=\frac{f}{2}=16 \text{ centim.}$$

Si l'on se rappelle que $p = 24$ centimètres, on voit que :

$$\frac{p}{p'}=1+\frac{4}{16}=4=\frac{BC}{CD}=\frac{EB}{eD} \text{ (I)}$$

cherchons $eD$

$$\frac{eD}{e''B}=\frac{OD}{OB}=\frac{60+4}{36}=\frac{16}{9};$$

combinant avec (I), on trouve

$$\frac{EB}{e''B}=\frac{64}{9},$$

d'où

$$\frac{E'B}{e''B+EB}=\frac{64}{64+9},$$

ou encore

$$EB=e''E\times\frac{64}{73}.$$

Mais $e''E$ s'obtient en fonction de la distance des images $e'E'$, en effet, $\frac{e''E}{e'E}=\frac{OB}{OG}$. Or, la formule des lentilles convergentes $\frac{p}{p'}=\frac{p}{\varphi}-1$ nous donne en observant que $p=36$ centimètres et $\varphi$ distance focale de l'objectif photographique $\varphi = 15$ centimètres,

$$\frac{p}{p'}=\frac{36}{15}-1=\frac{7}{5}=\frac{OB}{OC}=\frac{e''E}{e'E'}.$$

J'ai trouvé pour $e'E'$ 0.5 centim., cela nous donne $EB = 0.61$ centimètres.

L'angle d'incidence $\beta$ que nous cherchons est donné par les relations

$$\tang \beta = \frac{EB}{BC} = \frac{0.61}{24} = 0.0254,$$

d'où

$$\beta = 1°26'$$

Sous l'incidence normale le déplacement d'une frange indique une variation de distance des surfaces réfléchissantes de $\frac{\lambda}{2}$.

Sous l'incidence oblique $\beta$ le même déplacement est l'indice d'une variation de distance $\frac{\lambda}{2}$ sec. $\beta$.

Pour

$$\beta = 1°26', \quad \sec \beta = 1.0003.$$

On voit que la correction d'obliquité sera presque toujours négligeable.

Le calcul que nous venons de faire montre aussi que la grandeur de l'étincelle qui ne dépasse pas 2 millimètres et ses petites oscillations qui sont du même ordre de grandeur, ne peuvent altérer la précision de la méthode que de quantités entièrement négligeables.

## Manipulations photographiques.

J'emploie le procédé au collodion humide, qui présente outre une grande rapidité d'exécution une finesse très favorable aux mesures.

On doit rechercher ici ce qui constitue un défaut dans la photographie artistique, la dureté des images, l'acuité des contours ; ce résultat s'obtient en posant systématiquement trop peu et en renforçant l'image après le développement.

Le collodion dont je me sers se compose de :

| | |
|---|---|
| Alcool. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 40 cc. (*). |
| Éther. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 60 cc. |
| Coton poudre. . . . . . . . . . . . . . . . | 1 gramme. |
| Iodure de cadmium . . . . . . . . . . . . . | 1 gramme, |
| Bromure de cadmium . . . . . . . . . . . . | 0gr25 |

(*) Cornu, *Spectre normal du soleil, partie ultra-violette*, p. 6.

Voici la composition du révélateur :

| | |
|---|---|
| Eau distillée . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 1000 cc. |
| Sulfate de fer. . . . . . . . . . . . . . . . . | 40 grammes. |
| Alcool . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 30 cc. |
| Acide acétique crist. . . . . . . . . . . . . . | 30 cc. |

Le renforçage se fait au moyen d'une solution d'azotate d'argent à 2 °/₀. Enfin le bain d'argent sensibilisateur est à 8 °/₀. Le nitrate a été fondu et refondu à basse température d'après les méthodes du Dr Van Monckhoven. Après quelques insuccès dus au défaut de pureté de l'éther du commerce qu'il a fallu distiller, j'ai obtenu des couches sensibilisées bleuâtres et transparentes douées d'une grande sensibilité..

J'ai fait une série de clichés afin de déterminer :

1° La mise au point des rayons actiniques ; 2° le meilleur condensateur ; 3° le temps de pose. Parmi les condensateurs le ballon d'un litre a donné les meilleurs résultats, le temps de pose est de 15s à 20s.

Sur tous les clichés obtenus la forme et la disposition des courbes sont visiblement identiques, il n'y a de différence que pour la finesse des franges. Il saute aux yeux que l'on a affaire à une radiation parfaitement déterminée tout comme dans le cas de la soude. Il était bien probable que c'était la raie $0^{mm},000383$ du magnésium ; il fallait pourtant s'en assurer. Rien n'est plus facile. Après avoir obtenu le cliché, je laisse le système producteur des franges tel qu'il est, je l'éclaire à la lumière du sodium comme le faisait M. Fizeau et je dessine avec le plus grand soin les franges et le quadrillage. La comparaison de ce dessin avec le cliché va nous donner le rapport des longueurs d'onde. Voici la marche du calcul. On détermine d'abord le rapport de grandeur des deux images ; en mesurant de part et d'autre à la machine à diviser la longueur de 10 côtés de carrés, j'ai trouvé :

$$\frac{\text{Grandeur du dessin}}{\text{Grandeur du cliché}} = \frac{790}{87}$$

Prenant alors dans les deux images une partie où les franges

sont très sensiblement parallèles et équidistantes, on en mesure l'écartement moyen. J'ai trouvé pour le magnésium $0^{mm},453$ et pour la soude $6^{mm},15$. Si nous ramenons le cliché à la grandeur du dessin, nous trouvons un écartement moyen

$$0^{mm},453 \times \frac{790}{87} = 4^{mm},00.$$

La longueur d'onde de la raie du sodium étant $0^{mm},0005893$, nous trouvons pour le magnésium

$$0^{mm},0005893 \times \frac{400}{615} = 0^{mm},0003833.$$

Or, d'après les tables de M. Cornu (*), les trois composantes de la raie triple du magnésium ont pour longueurs d'onde :

$0^{mm},00038290$
$0^{mm},00038315$
$0^{mm},00038375$
En moyenne $0^{mm},00038327$

On le voit, la concordance est parfaite.

## § III. — *Relevé micrométrique. Sensibilité de la méthode.*

Ce relevé se fait à l'aide d'un microscope grossissant 20 ou 30 fois et fixé au chariot de la machine à diviser. On suit les lignes des deux systèmes et on fait la lecture du compteur et de la tête de vis à chaque passage du réticule sur le milieu d'une frange ou sur un croisement de droites. La position de chaque point de repère entre les deux franges qui le comprennent se trouve déterminée par deux rapports dont on a mesuré les termes. Afin de juger expérimentalement de la précision du repérage, j'ai fait à deux reprises le relevé d'un même cliché. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant. Les lettres A, B, C, etc., représentent les 16 points choisis. On a accentué les lettres dans

(*) CORNU, *Spectre normal du soleil, partie ultra-violette*, pl. I.

les mesures faites sur le second système de lignes. Enfin, les pointés sont exprimés en franges et centièmes de franges.

| | II. | I. | Différences Δ. | Carrés des différences Δ. |
|---|---|---|---|---|
| A | 2.96 | 2.96 | 0 | 0 |
| A′ | 2.95 | 2.94 | + 1 | 1 |
| B | 4.60 | 4.60 | 0 | 0 |
| B′ | 4.63 | 4.64 | — 1 | 1 |
| C | 6.25 | 6.28 | — 3 | 9 |
| C′ | 6.23 | 6.20 | + 3 | 9 |
| D | 7.60 | 7.55 | + 5 | 25 |
| D′ | 7.60 | 7.60 | 0 | 0 |
| E | 4.08 | 4.09 | — 1 | 1 |
| E′ | 4.10 | 4.06 | + 4 | 16 |
| F | 5 80 | 5.82 | — 2 | 4 |
| F′ | 5.86 | 5.89 | — 3 | 9 |
| G | 7.37 | 7.34 | + 3 | 9 |
| G′ | 7.39 | 7.34 | + 5 | 25 |
| H | 8.80 | 8.79 | + 1 | 1 |
| H′ | 8.83 | 8.82 | + 1 | 1 |
| I | 5.34 | 5.36 | — 2 | 4 |
| I′ | 5.31 | 5.29 | + 2 | 4 |
| K | 7.06 | 7.05 | + 1 | 1 |
| K′ | 7.06 | 7.06 | 0 | 0 |
| L | 8.49 | 8.52 | — 3 | 9 |
| L′ | 8.61 | 8.59 | + 2 | 4 |
| M | 10.00 | 10.00 | 0 | 0 |
| M′ | 9.96 | 9.95 | + 1 | 1 |
| N | 6.66 | 6.64 | + 2 | 4 |
| N′ | 6.73 | 6.73 | 0 | 0 |
| O | 9.84 | 9.88 | — 4 | 16 |
| O′ | 9.88 | 9.91 | — 3 | 9 |
| P | 11.34 | 11.36 | — 2 | 4 |
| P′ | 11.26 | 11.25 | + 1 | 1 |
| Q | 8.31 | 8.30 | + 1 | 1 |
| Q′ | 8.34 | 8.35 | — 1 | 1 |

Ce qui donne pour le pointé moyen les valeurs :

| II. | I. | Différence. |
|---|---|---|
| 7.163 | 7.161 | 0.002 |

Avant d'appliquer à ces résultats les formules du calcul des probabilités, il faut nous assurer que les erreurs Δ satisfont au

moins approximativement à la loi de fréquence des erreurs fortuites. M. Cornu (*) a donné un moyen très élégant de vérifier cette condition ; il faut que l'on ait pour $n$ observations

$$\frac{2\,\dfrac{\Sigma\Delta^2}{n}}{\left[\dfrac{\Sigma \mathrm{VA}\,(\Delta)}{n}\right]^2} = \pi = 3.1415.$$

Dans le cas actuel

$$\frac{\dfrac{170}{16}}{\left(\dfrac{58}{32}\right)^2} = 3.23.$$

Ce nombre s'approche suffisamment de $\pi$ eu égard au petit nombre d'observations $n$.

Calculons maintenant l'erreur probable $\varepsilon$ du pointé moyen par la formule connue

$$\varepsilon = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{n\,(n-1)}}$$

On trouve pour $\varepsilon$ évalué en franges :

$$\mathrm{E} = \pm\, 0{,}0028.$$

La frange valant ici $0^{mm},00019$, on aura

$$\mathrm{E} = \pm\, \underline{0^{mm},0000005}.$$

La limite de précision de la méthode atteint donc $^1/_{2000000}$ de millimètre.

Pour se rendre compte de la valeur relative de ce résultat, il faut mettre en regard la sensibilité de quelques autres méthodes.

---

(*) CORNU. *Vitesse de la lumière 220 dans les annales de l'Observatoire de Paris*, XIII, 1876.

Les sphéromètres à levier de Perreaux ne permettent pas d'apprécier des quantités moindres que $0^{mm},00025$.

La méthode des comparateurs à traits, pratiquée avec tant de soin au bureau international des poids et mesures, ne peut, d'après le savant directeur de cet établissement, dépasser en sensibilité $0^{mm},0001$.

Il est un autre instrument, assez peu connu, véritable comparateur optique, imaginé par M. Cornu et décrit par lui dans le *Journal de physique* (tome IV, 7, 1875).

Imaginons une barre rigide, reposant sur un plan fixe par deux pointes. Perpendiculairement à la ligne des pointes, fixons à la partie supérieure de la barre un miroir plan M. Soulevons maintenant l'une des pointes, A par exemple, en interposant entre elle et le plan fixe une lame à faces parallèles. Soit $\alpha$ l'angle dont la ligne des pointes AB a tourné autour de B; l'épaisseur $e$ de la lame interposée sera $e = l \sin \alpha$, $l$ étant la distance des pointes. L'angle $\alpha$ se mesure avec une grande précision par la rotation du miroir en appliquant la méthode de Poggendorff au moyen d'une lunette et d'une règle divisée verticale. En réalité, le levier de M. Cornu est un fléau de balance dont le couteau central est remplacé par les deux pointes P et P' et les couteaux extrêmes par les points A et A'. L'objet à mesurer se place sous les pointes PP', et l'on mesure la rotation du miroir quand on passe du contact de A au contact de A' avec le plan fixe.

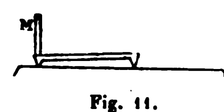
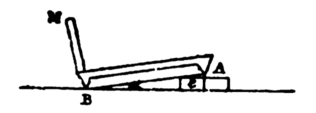



Fig. 11.



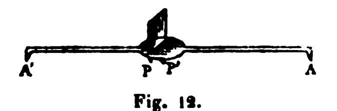




Fig. 12.

Pour évaluer la sensibilité de cet instrument, remarquons d'abord que si l'échelle divisée et le point A coïncidaient, une petite épaisseur $e$ introduite sous la ligne des pointes PP' donnerait à l'échelle une différence de lecture égale à $4e$. Comme on peut apprécier sur l'échelle $^1/_{10}$ de millimètre, on voit que l'on pourrait apprécier $e$ à $^1/_{40}$ de millimètre.

Pour avoir la limite de sensibilité du *levier optique* il faut multiplier cette fraction $^1/_{40}$ par le rapport $\frac{l}{L}$ de la longueur $l$ du demi-levier à la distance L du miroir à l'échelle divisée. Il y a intérêt à augmenter L et à réduire $l$. Supposons L = 10 mètres. Il semble à priori qu'on puisse réduire indéfiniment $l$; en réalité, cette quantité ne peut décroître au-dessous d'une certaine limite si l'on ne veut perdre en précision ce que l'on gagne en sensibilité. En effet, à mesure que $l$ diminue, la précision relative avec laquelle on le mesure décroît. Supposons qu'on dispose d'une machine à diviser pouvant donner l'approximation d'une fraction $\mu$ de millimètre. Si le levier a $l$ millimètres, sa longueur sera connue à une fraction près $\frac{\mu}{l}$ de sa valeur; l'approximation de $\frac{l}{L}$ étant la même que celle de $l$, on voit que la limite dont je parlais tantôt sera atteinte lorsqu'on aura

$$\frac{l}{L} = \frac{\mu}{l} \quad \text{ou} \quad l^2 = L\mu;$$

posons L = 10000 et $\mu = \frac{1}{500}$ (limite qu'il me paraît difficile de dépasser dans la mesure de la distance de deux pointes).

Nous trouvons :

$$l^2 = \frac{10000}{500}, \quad l = \sqrt{20} = 4{,}5,$$

d'où $\frac{l}{L} = 0.00045$ et la limite de précision de la méthode du levier optique sera en millimètres $\frac{1}{40} \times 0.00045$, soit environ $0^{mm},00001$.

Je rappellerai enfin que M. Fizeau donne comme limite atteinte dans ses recherches $\frac{\lambda_D}{40}$ ou $0^{mm},000015$.

Il nous faut examiner une dernière question qui se rattache au principe même de la méthode des interférences. Dans ces recherches, l'unité de mesure est la longueur d'onde de la lumière employée, la précision des mesures demande non seulement que cette longueur d'onde soit bien connue, mais encore, et surtout, que dans une série d'opérations, elle reste toujours bien identique à elle-même.

Rappelons un phénomène bien connu. Si l'on produit les franges au moyen de la lumière de la soude réfléchie aux deux faces d'une lame d'air, et si, partant du contact, on fait croître d'une manière continue la distance des surfaces réfléchissantes, on voit bientôt la netteté du phénomène des interférences se troubler; les franges noires et brillantes semblent se dilater simultanément et se recouvrir; lorsque les surfaces réfléchissantes ont atteint une distance qui correspond au passage d'environ 500 taches noires par le centre, on n'a plus sensiblement qu'un champ lumineux uniforme. Si l'on fait croître encore la distance, l'apparence primitive revient peu et après le passage de 500 nouvelles taches noires le phénomène a repris tout son éclat, etc.

Pour se rendre compte de ces apparences, il faut se rappeler qu'en réalité la lumière de la soude est dichromatique. La raie spectrale D est formée de deux composantes à peu près de même intensité et dont les longueurs d'onde sont $\lambda_1 = 0^{mm},0005889$ et $\lambda_2 = 0^{mm},0005895$ d'après Angström. Chacune de ces deux lumières monochromatiques donnera évidemment son système de franges et l'on comprend que si l'épaisseur $e$ de la lame d'air était telle que l'on eût $e = m\,\frac{\lambda_2}{2} = (m + \frac{1}{2})\,\frac{\lambda_1}{2}$, les deux systèmes de franges seraient complémentaires et s'effaceraient mutuellement. La relation précédente nous donne $m = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = 500$ environ, d'où $e = 0^{mm},147$, pour cette valeur $e$ les franges s'effacent. Si l'on double cette valeur de $e$ l'épaisseur de la lame d'air correspondra à $2m$ franges du système $\lambda_2$ et $2\,(m + \frac{1}{2})$ ou $2m + 1$ franges du système $\lambda_1$. Les deux systèmes seront en coïncidence et le phénomène reprendra tout son éclat, et ainsi de suite.

Quand on se sert de lames d'air très minces, comme c'est presque toujours le cas dans les mesures de dilatations, la netteté du phénomène reste sensiblement constante; il n'en est pas moins vrai que les deux systèmes de franges existent toujours et que les choses se passent absolument comme si l'on avait affaire à une longueur d'onde moyenne, fonction de l'épaisseur $e$ de la lame d'air; chaque fois que cette épaisseur, partant de zéro, a augmenté de $\frac{\lambda}{2}$, la longueur d'onde moyenne, partant de la



valeur $\frac{0^{mm},0005889 + 0^{mm},0005895}{2}$ a varié de $\frac{1}{1000}$ de sa valeur. Bien, plus, si je considère une frange de rang *n*, la valeur de la longueur d'onde moyenne en ce point diffère de $\frac{n}{1000}$ de la valeur correspondante au centre des franges.

Il est cependant possible de connaître dans chaque cas la valeur de l'unité de mesure dont on se sert, à $\frac{1}{500}$ près de sa valeur.

On a généralement une dizaine de franges dans le champ. On considérera celle qui forme le milieu du système et l'on mesurera en un de ses points l'épaisseur de la lame d'air; la méthode que j'ai exposée plus haut permet de faire cette mesure au moins à $^1/_{20}$ près. D'ailleurs, pour une lame d'air même de $0^{mm},015$, l'écart des deux systèmes de franges n'atteint que $\frac{4}{100}$ de $\frac{\lambda}{2}$. Cet écart étant connu au $^1/_{20}$, on voit que la longueur d'onde moyenne sera connue à $\frac{1}{1000}$ de sa valeur près.

Nous pourrions répéter les mêmes raisonnements pour la raie triple du magnésium, sauf que l'écart des deux composantes extrêmes atteint $\frac{1}{450}$ de la valeur moyenne. Nous devons d'ailleurs nous demander si cette radiation de magnésium se retrouve toujours identique à elle-même. Je résoudrai toutes les difficultés à la fois en opérant comme suit : Je donnerai à la lame d'air une série d'épaisseurs peu différentes les unes des autres et comprises entre les limites utiles. Pour chacune de ces épaisseurs, je comparerai la longueur magnésienne $\lambda_M$ à la longueur d'onde $\lambda_D$ de la soude et cela en opérant comme je l'ai fait précédemment pour reconnaître la radiation de mes clichés. Je déterminerai ainsi une première série de valeurs de $\lambda_M$ en fonction de l'épaisseur *e*.

Cela fait, pour les mêmes épaisseurs, je calculerai les valeurs moyennes $\lambda_M$ en partant des longueurs d'onde données par les tables pour les composantes de la raie triple du magnésium.

Si les deux séries de valeurs ainsi trouvées pour $\lambda_M$ diffèrent entre elles de quantités moindres que $\frac{1}{500}$ $\lambda_M$, j'aurai acquis la certitude que la méthode d'enregistrement photographique du déplacement des franges d'interférence permet d'apprécier des variations de longueur de $0^{mm},0000005$.

---



# SUR UNE NOUVELLE MÉTHODE DE RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES ET SUR L'APPLICATION DE CETTE MÉTHODE AU CALCUL DES DÉTERMINANTS

PAR

**l'abbé B.-I. CLASEN**

---

On expose habituellement, en algèbre élémentaire, trois méthodes de résolution des équations linéaires qui, au fond, ne diffèrent pas l'une de l'autre. Ces méthodes introduisent dans les équations des facteurs communs à tous leurs termes ou aux deux termes des fractions qu'elles contiennent. L'exposition, même l'exposition élémentaire de ces méthodes, ferait bien de les indiquer; la théorie, pour être complète, l'exigerait et la pratique, comme nous le ferons voir (12), y trouverait des avantages précieux. Aussi enseignerons-nous (13) une manière d'employer ces méthodes qui les fera connaître sans difficulté.

La théorie des déterminants nous fournit, il est vrai, une méthode (identique au fond à celle du n° 2) qui n'a pas ces inconvénients, mais qui, pour être belle et simple en théorie, cesse d'être pratique dès qu'il s'agit d'un système de plus de trois équations.

La méthode que nous allons exposer indique les facteurs communs avant qu'ils s'introduisent dans les équations; de plus,



elle simplifie les calculs en réduisant le nombre des opérations à faire. Elle semble aussi être plus scientifique, parce qu'elle fait connaître et qu'elle repousse en quelque sorte, aussitôt qu'elles entrent dans les calculs, et les équations incompatibles avec celles dont on s'est déjà servi et celles qui en sont une conséquence.

Dans un premier chapitre, nous exposerons la méthode, nous ferons la discussion des équations qu'elle nous impose d'elle-même et nous l'emploierons pour chercher les solutions générales.

Dans un second chapitre, nous la démontrerons par la théorie des déterminants et nous l'appliquerons au calcul des valeurs de ceux-ci (*).

# I

## Exposition et démonstration élémentaire de la méthode.

**1.** *Caractère distinctif de la méthode.* — Les méthodes d'élimination dont on se sert habituellement procèdent par réductions successives d'un système de $p$ équations à $p$ inconnues à un système de $(p-1)$ équations à $(p-1)$ inconnues, de ce système à un système de $(p-2)$ équations à $(p-2)$ inconnues et ainsi de suite. Dans celle que nous allons exposer, nous réduirons les deux premières équations à deux équations entre *chacune* de deux inconnues et les autres, puis ces deux-ci avec la troisième du système primitif à trois équations entre *chacune* de trois inconnues et les autres et ainsi de suite. Pour abréger, nous nommerons ces équations, qui conduisent immédiatement aux valeurs des premières inconnues en fonction des autres, les équations qui expriment les valeurs des premières inconnues en fonction des autres, ou même plus simplement les équations qui expriment les valeurs des premières inconnues.

(*) M. P. Mansion, professeur de l'Université de Gand, chargé par la Société scientifique de Bruxelles d'examiner ce travail, a bien voulu me faire de précieuses observations concernant la rédaction ; j'ai tâché d'en profiter et je l'en remercie vivement.



**2.** *Méthode sans l'emploi de la division.* — Soient les équations du système I, dont nous désignerons les premiers membres par des lettres affectées de l'indice 1,

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1s + \ldots m_1k = 0, \\ Y_1 &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2s + \ldots m_2k = 0, \\ Z_1 &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3s + \ldots m_3k = 0, \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \quad . \quad \text{(I)}$$

L'élimination de $x$ et celle de $y$ entre les deux premières de ces équations nous donne

$$a_1Y_1 - a_2X_1 = (a_1b_2 - a_2b_1)\,y + (a_1c_2 - a_2c_1)\,z + \cdots = 0,$$
$$b_2X_1 - b_1Y_1 = (a_1b_2 - a_2b_1)\,x + (c_1b_2 - c_2b_1)\,z + \cdots = 0,$$

ou encore

$$b_1Y_1 - b_2X_1 = -(a_1b_2 - a_2b_1)\,x - (c_1b_2 - c_2b_1)\,z - \cdots = 0.$$

On voit que, dans les deux équations qu'on trouve ainsi et qui expriment les valeurs de $y$ et de $x$, ces deux inconnues sont, en faisant abstraction des signes, multipliées par le même coefficient. Cette propriété nous permet d'éliminer d'emblée $x$ et $y$ de l'équation $Z_1 = 0$. En désignant par $Y_2$ et $X_2$ les premiers membres des deux équations qui expriment les valeurs de $y$ et de $x$ tirées des deux premières équations I, et par $m$ le coefficient commun de ces deux inconnues, de sorte que

$$Y_2 = my + (a_1c_2 - a_2c_1)\,z + \cdots = 0,$$
$$X_2 = mx + (c_1b_2 - c_2b_1)\,z + \cdots = 0,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} mZ_1 &= ma_3x + mb_3y + mc_3z + \cdots\cdots\cdots = 0, \\ -b_3Y_2 &= \qquad\quad - mb_3y - b_3(a_1c_2 - a_2c_1)\,z - \cdots = 0, \\ -a_3X_2 &= -ma_3x \qquad\quad - a_3(c_1b_2 - c_2b_1)\,z - \cdots = 0, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit une équation de la forme

$$Z_3 = Rz + Ss + \cdots = 0.$$

En cherchant de la même manière au moyen des trois premières équations I, celles qui expriment les valeurs de $y$ et de $x$ pour des valeurs quelconques de $s$, $t$, etc., on trouverait, comme on pourrait s'en convaincre par un calcul direct et comme d'ailleurs nous allons le démontrer d'une manière générale, des équations de la forme

$$X_3 = Rx + S's + \cdots = 0,$$
$$Y_3 = Ry + S''s + \cdots = 0,$$

où $x$ et $y$ se trouvent multipliés par le coefficient R de $z$ dans l'expression $Z_3$, ce qui permettra d'éliminer d'emblée $x$, $y$ et $z$ de l'équation $S_1 = 0$, et ainsi de suite.

En d'autres termes, pour éliminer les inconnues $x$, $y$, $z$, $s$ entre les cinq premières des équations I, il faut préalablement, au moyen des quatre premières équations, chercher les valeurs de $x$, $y$, $z$ et $s$. D'après le principe de cette méthode qui exclut la division, les inconnues $x$, $y$, $z$ et $s$ seront, dans ces équations, multipliées par le même coefficient E ou — E, ce qui permettra de les éliminer d'emblée de l'équation $ET_1 = 0$, c'est-à-dire de la 5ᵉ équation multipliée par E. Les quatre équations auxiliaires seront chacune déduites, d'une manière semblable, des trois premières équations, etc., de sorte que toutes les équations ne se trouvent que par un procédé unique, bien déterminé et ne peuvent se présenter que sous une seule forme, tandis que les autres méthodes peuvent, par des voies différentes, conduire à des équations $mAt + mBv + \cdots = 0$ et $nAt + nBv + \cdots = 0$, qui pour être équivalentes ne sont pas absolument de la même forme.

**3.** *Démonstration du principe fondamental.* — Supposons que ce principe de l'égalité des coefficients soit vrai pour quatre équations et démontrons-le pour cinq.

Les quatre premières équations du système I nous donneront les valeurs de $x$, $y$, $z$ et $s$ sous la forme

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = Ex + At + \alpha u \cdots = 0, \\ Y_1 = Ey + Bt + \beta u \cdots = 0, \\ Z_1 = Ez + Ct + \gamma u \cdots = 0, \\ S_1 = Es + Dt + \delta u \cdots = 0, \end{array}\right\} \cdots\cdots \quad (4)$$

parce que, d'après notre hypothèse, les coefficients de $x$, $y$, $z$ et $s$ doivent être égaux ; et elles nous donneront les valeurs de $x$, $y$, $z$ et $t$ sous la forme

$$\left.\begin{array}{l} X_{IV} = Dx + A_1 s + \alpha_1 u \,..= 0, \\ Y_{IV} = Dy + B_1 s + \beta_1 u \ldots = 0, \\ Z_{IV} = Dz + C_1 s + \gamma_1 u \ldots = 0, \\ T_{IV} = Dt + Es + \delta_1 u \ldots = 0, \end{array}\right\} \cdots\cdots \quad (IV)$$

car $T_{IV} = 0$ et $S_1 = 0$ sont la même équation, qui ne peut être trouvée que d'une seule manière, savoir par l'élimination de $x$, $y$ et $z$ de la quatrième équation I et, d'après notre hypothèse, les coefficients de $x$, $y$ et $z$ doivent être égaux à celui de $t$.

Nous allons de plus démontrer que $A_1 = -A$.

Si E est différent de 0, le premier de ces groupes nous donne les valeurs de $x$, $y$, $z$ et $s$ pour des valeurs quelconques des autres lettres $t$, $u$, etc. (*).

En supposant donc que E soit différent de 0, nous aurons pour

$$t = 1, \quad u = v = \cdots = k = 0,$$
$$Ex + A = 0, \quad \text{et} \quad Es + D = 0.$$

D'où l'on tire

$$Exs + As = 0, \quad \text{et} \quad Exs + Dx = 0,$$

(*) L'équivalence des groupes (4) et (IV) et des groupes (5) et (V) que nous emploierons dans la suite est établie aux nos 6 et 8. Nous faisons cette remarque pour prévenir une objection qui peut venir à l'esprit du lecteur.



et

$$Dx - As = 0.$$

La première équation du groupe (IV) deviendra

$$Dx + A_1 s = 0,$$

ce qui serait impossible, si l'on n'avait pas

$$A_1 s = - As.$$

On trouverait de même

$$B_1 s = - Bs$$

et

$$C_1 s = - Cs.$$

Si $E = 0$, nous perdons le droit de dire que le groupe IV nous donne les valeurs $x$, $y$, $z$, $s$ pour des valeurs quelconques des autres inconnues, ce qui empêche notre démonstration d'être applicable à ce cas. Mais si un des coefficients A, B, C, D, par exemple D, est différent de 0, nous pouvons choisir le groupe IV pour en faire le point de départ de cette démonstration. Enfin si $A = B = C = D = E = 0$, nous observerons que les équations $X_4 = 0$ et $X_{IV} = 0$ appartiennent toutes les deux au groupe qui est censé exprimer les valeurs de $s$, $t$, $y$, $z$, de sorte que les coefficients A et $A_1$ de $s$ et $t$ ne peuvent différer que par leurs signes, et que, si $A = 0$, nous pouvons en tout cas écrire $A_1 = - A$.

Pour éliminer $x$, $y$, $z$ et $s$ de l'équation $T_1 = 0$, la 5[e] du système I, nous n'avons qu'à additionner les équations suivantes :

$$\begin{array}{rlllll}
ET_1 = & a_5 Ex + & b_5 Ey + & c_5 Ez + & d_5 Es + & e_5 Et + \cdots = 0, \\
- a_5 X_4 = & - a_5 Ex & & & & - a_5 At - \cdots = 0, \\
- b_5 Y_4 = & & - b_5 Ey & & & - b_5 Bt - \cdots = 0, \\
- c_5 Z_4 = & & & - c_5 Ez & & - c_5 Ct - \cdots = 0, \\
- d_5 S_4 = & & & & - d_5 Es & - d_5 Dt - \cdots = 0,
\end{array}$$



ce qui nous donnera

$$T_5 = (-a_5A - b_5B - c_5C - d_5D + e_5E)t + \cdots = 0.$$

Pour éliminer de l'équation $T_1 = 0$, $x$, $y$, $z$ et, au lieu de $s$, une autre des inconnues restantes, par exemple $t$, nous n'avons qu'à additionner les équations suivantes après avoir remplacé dans les équations (IV) $A_1s$, $B_1s$ et $C_1s$ par $-As$, $-Bs$ et $-Cs$ :

$$\begin{array}{rlllll}
DT_1 = & a_5Dx & + b_5Dy & + c_5Dz & + d_5Ds + e_5Dt + \cdots & = 0, \\
-a_5X_{IV} = & -a_5Dx & & & + a_5As + \cdots\cdots & = 0, \\
-b_5Y_{IV} = & & -b_5Dy & & + b_5Bs + \cdots\cdots & = 0, \\
-c_5Z_{IV} = & & & -c_5Dz & + c_5Cs + \cdots\cdots & = 0, \\
-c_5T_{IV} = & & & & -e_5Es - e_5Dt - \cdots & = 0,
\end{array}$$

ce qui nous donnera

$$S_5 = (a_5A + b_5B + c_5C + d_5D - e_5E)s + \cdots = 0.$$

Donc si l'on cherche par cette méthode, au moyen des 5 premières équations I, les équations qui expriment les valeurs de 5 inconnues $x$, $y$, $z$, $s$ et $t$, les coefficients de deux quelconques, $s$ et $t$, de ces inconnues et par conséquent les coefficients de ces cinq inconnues devront, dans ces cinq équations, être égaux aux signes près, si ce principe de l'égalité des coefficients est démontré pour 4 équations. On démontrerait de la même manière qu'il est vrai pour $p$ équations, s'il l'est pour $(p-1)$. Démontré pour 2, il l'est donc pour 3, et par conséquent pour 4 équations, etc.

**4.** *Méthode abrégée par la division.* — La méthode que nous venons d'exposer, fastidieuse déjà pour résoudre un système de quatre équations et impraticable pour un système de six, n'aurait qu'une valeur théorique, s'il n'y avait pas moyen de l'abréger. Mais le principe des coefficients égaux nous fournit ce moyen.

Supposons que les coefficients E du système (4) ne soient pas nuls; choisissons dans l'équation $T_5 = 0$ une inconnue $t$ don





le coefficient F soit également différent de 0. Les équations qui donneront les valeurs de $x$, $y$, $z$, $s$ et $t$ pour des valeurs quelconques des autres inconnues (ou lettres) seront, d'après le numéro précédent, de la forme

$$\left.\begin{array}{l} T_5 = Ft + eu + \cdots = 0 \\ S_5 = Fs + du + \cdots = 0 \\ Z_5 = Fz + cu + \cdots = 0 \\ Y_5 = Fy + bu + \cdots = 0 \\ X_5 + Fx + au + \cdots = 0 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Si aucun des coefficients numériques ou algébriques des équations I n'a de dénominateur, la méthode sans l'emploi de la division n'en peut pas introduire, et tous les coefficients de ces équations doivent être des nombres entiers, ou des expressions algébriques entières par rapport aux coefficients primitifs.

L'élimination de $t$, entre l'équation $T_5 = 0$ et les équations (4), nous donne

$$\begin{array}{l} EFs + (\delta F - Df)\, u + \cdots = 0, \\ EFz + (\gamma F - Cf)\, u + \cdots = 0, \\ EFy + (\beta F - Bf)\, u + \cdots = 0, \\ EFx + (\alpha F - Af)\, u + \cdots = 0, \end{array}$$

ou, comme par hypothèse E n'est pas nul,

$$\left.\begin{array}{l} S_V = Fs + \left(\dfrac{\delta F - Df}{E}\right) u + \cdots = 0, \\ Z_V = Fz + \left(\dfrac{\gamma F - Cf}{E}\right) u + \cdots = 0, \\ Y_V = Fy + \left(\dfrac{\beta F - Bf}{E}\right) u + \cdots = 0, \\ X_V = Fx + \left(\dfrac{\alpha F - Af}{E}\right) u + \cdots = 0. \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (V)$$

Ces systèmes (5) et (V), qui expriment les valeurs de $s$, $z$, $y$



et $x$ pour des valeurs arbitraires de $u, v, w, k$, nous donnent pour $u = 1$, $v = w = \dots = k = 0$,

$$Fs + d = 0 = Fs + \frac{\delta F - Df}{E},$$

$$Fz + c = 0 = Fz + \frac{\gamma F - Cf}{E},$$

$$Fy + b = 0 = Fy + \frac{\beta F - Bf}{E},$$

$$Fx + a = 0 = Fx + \frac{\alpha F - Af}{E};$$

d'où nous tirons

$$d = \frac{\delta F - Df}{E},$$

$$c = \frac{\gamma F - Cf}{E},$$

$$b = \frac{\beta F - Bf}{E},$$

$$a = \frac{\alpha F - Af}{E}.$$

On démontrerait de la même manière que les coefficients de $v, w$... et $k$ des équations (V) sont identiques ave cceux des équations (5) et se réduisent, par conséquent, à des nombres entiers ou des expressions algébriques entières, s'il ne se trouve pas de dénominateur dans le système primitif I.

Donc, après avoir trouvé l'équation $T_5 = 0$, on déterminera les autres équations du système (5) de la manière suivante : *On choisit une inconnue* $t$ *de l'équation* $T_5 = 0$, *dont le coefficient* F *soit différent de* 0, *pour l'éliminer entre l'équation* $T_5 = 0$ *et les quatre équations* (4) *et on divisera les équations résultantes par* E, *le coefficient commun des inconnues dont les valeurs sont exprimées par le système* (4), *et que nous supposons également être différent de* 0. D'après la remarque que nous venons de faire, ces divisions nous donneront des nombres entiers, si les coefficients des équations primitives sont entiers.



Pour ne pas se priver de cet avantage, on commencera par chasser les dénominateurs de toutes les équations données. On choisira alors, dans l'équation $X_1 = 0$, une inconnue $x$ dont le coefficient $a_1$ soit différent de 0 pour l'éliminer entre les deux premières équations I. Cette élimination et les suivantes seront faites d'après le procédé général, c'est-à-dire que, par exemple, $x$ sera éliminé entre deux équations contenant les termes $4x$ et $-6x$, en multipliant la première par 6 et l'autre par 4, et entre deux équations contenant les termes $4x$ et $0.x$ en multipliant la seconde par 4. Dans l'équation résultante $Y_2 = 0$, on choisira une inconnue $y$, multipliée par un coefficient différent de 0, pour l'éliminer entre $X_1 = 0$ et $Y_2 = 0$, et on divisera l'équation résultante par $a$, pour trouver l'équation $X_2 = 0$; après quoi on éliminera d'emblée $x$ et $y$ entre les équations $Y_2 = 0$, $X_2 = 0$ et $Z_1 = 0$. Le reste des opérations est indiqué par la règle précédente.

**5.** *Exemple.* — Soient à résoudre les équations :

$$\begin{array}{rrrrrrl}
X_1 = & 2x - & 3y + & 5z + & u + & 3v - & 13 = 0 \\
Y_1 = & x + & 2y - & 3z + & 4u - & 5v + & 15 = 0 \\
Z_1 = & 3x - & 5y + & 7z + & 2u - & 3v - & 18 = 0 \\
U_1 = & 5x - & y + & 4z + & 8u + & 2v + & 2 = 0 \\
V_1 = & 4x + & 7y - & 2z + & 3u + & 114v + & 12 = 0
\end{array}$$

---

$$\begin{array}{rrrrrrl}
X_1 = & 2x - & 3y + & 5z + & u + & 3v - & 13 = 0 \\
\hline
2Y_1 = & 2x + & 4y - & 6z + & 8u - & 10v + & 30 = 0 \\
-X_1 = & -2x + & 3y - & 5z - & u - & 3v + & 13 = 0 \\
Y_2 = & & 7y - & 11z + & 7u - & 13v + & 43 = 0 \\
\hline
7X_1 = & 2.7x - & 3.7y + & 35z + & 7u + & 21v - & 91 = 0 \\
3Y_2 = & & 3.7y - & 33z + & 21u - & 39v + & 129 = 0 \\
 & 2.7x & + & 2z + & 28u - & 18v + & 38 = 0 \\
X_2 = & 7x & + & z + & 14u - & 9v + & 19 = 0 \\
\hline
\end{array}$$

$$7Z_1 = 3.7x - 5.7y + 49z + 14u - 21v - 126 = 0$$
$$5Y_2 = 5.7y - 55z + 35u - 65v + 215 = 0$$
$$-3X_2 = -3.7x - 3z - 42u + 27v - 57 = 0$$
$$Z_3 = -9z + 7u - 59v + 32 = 0$$

---

$$-9Y_2 = -9.7y + 9.11z - 63u + 117v - 387 = 0$$
$$11Z_3 = -9.11z + 77u - 649v + 352 = 0$$
$$-9.7y + 14u - 532v - 35 = 0$$
$$Y_3 = -9y + 2u - 76v - 5 = 0$$

---

$$9X_2 = 9.7x + 9z + 126u - 81v + 171 = 0$$
$$Z_3 = -9z + 7u - 59v + 32 = 0$$
$$9.7x + 133u - 140v + 203 = 0$$
$$X_3 = 9x + 19u - 20v + 29 = 0$$

---

$$9U_1 = 5.9x - 9y + 4.9z + 72u + 18v + 18 = 0$$
$$4Z_3 = -4.9z + 28u - 236v + 128 = 0$$
$$-Y_3 = 9y - 2u + 76v + 5 = 0$$
$$-5X_3 = -5.9x - 95u + 100v - 105 = 0$$
$$U_4 = 3u - 42v + 6 = 0$$

---

$$3Z_3 = -3.9z + 3.7u - 177v + 96 = 0$$
$$-7U_4 = -3.7u + 294v - 42 = 0$$
$$-3.9z + 117v + 54 = 0$$
$$Z_4 = -3z + 13v + 6 = 0$$

---

$$-3Y_3 = 9.3y - 2.3u + 228v + 15 = 0$$
$$2U_4 = 2.3u - 84v + 12 = 0$$
$$9.3y + 144v + 27 = 0$$
$$Y_4 = 3y + 16v + 3 = 0$$

---

$$3X_3 = 9.3x + 19.3u - 60v + 87 = 0$$
$$-19U_4 = -19.3u + 798v - 114 = 0$$
$$9.3x + 738v - 27 = 0$$
$$X_4 = 3x + 82v - 3 = 0$$

---

$$3V_1 = 4.3x + 7.3y - 2.3z + 3.3u + 342v + 36 = 0$$
$$-3U_4 = -3.3u + 126v - 18 = 0$$
$$-2Z_4 = 2.3z - 26v - 12 = 0$$
$$-7Y_4 = -7.3y - 112v - 21 = 0$$
$$-X_4 = -4.3x - 328v + 12 = 0$$
$$V_5 = 2v - 3 = 0$$

---

$$\begin{array}{rrrrl}
2U_4 = & 3.2u & -\ 42.2v & +\ 12 & = 0 \\
42V_5 & & 42.2v & -\ 126 & = 0 \\
\hline
& 3.2u & & -\ 114 & = 0 \\
U_5 = & 2u & & -\ 38 & = 0 \\
\hline
-\ 2Z_4 = & 3.2z & -\ 13.2v & -\ 12 & = 0 \\
13V_5 = & & 13.2v & -\ 39 & = 0 \\
\hline
& 3.2z & & -\ 51 & = 0 \\
Z_5 = & 2z & & -\ 17 & = 0 \\
\hline
2Y_4 = & 3.2y & +\ 16.2v & +\ 6 & = 0 \\
-\ 16U_5 = & & -\ 16.2v & +\ 48 & = 0 \\
\hline
& 3.2y & & +\ 54 & = 0 \\
Y_5 = & 2y & & +\ 18 & = 0 \\
\hline
2X_4 = & 3.2x & +\ 82.2v & -\ 6 & = 0 \\
-\ 82U_5 = & & -\ 82.2v & +\ 246 & = 0 \\
\hline
& 3.2x & & +\ 240 & = 0 \\
X_5 = & 2x & & +\ 80 & = 0 \\
\hline
\end{array}$$

## Discussion des équations.

La méthode dont nous venons d'expliquer les règles suppose que nous trouvions dans chacune des équations $X_1 = 0$, $Y_2 = 0$, $Z_3 = 0$, etc., un coefficient différent de 0. Notre exposition resterait incomplète si nous n'examinions pas le cas où tous les coefficients de l'une ou de l'autre de ces équations s'annulent. Nous sommes ainsi forcément conduit à la discussion des équations. Nous la ferons brièvement, non pour résoudre beaucoup de questions nouvelles, mais surtout pour faire voir la grande simplicité avec laquelle les principes que la discussion établit se déduisent des équations auxiliaires qui se présentent dans cette méthode.

Soient les cinq équations

$$\left.\begin{array}{l}
X_1 = a_1x + b_1y + c_1z + d_1s + e_1t + f_1u + g_1v + h_1w + i_1k = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
T_1 = a_5x + b_5y + c_5z + d_5s + e_5t + f_5u + g_5v + h_5w + i_5k = 0,
\end{array}\right\} \text{(I)}$$

et supposons que les quatre premières de ces équations nous aient donné le système

$$\left.\begin{aligned} X_4 &= Ex + At + \cdots = 0, \\ Y_4 &= Ey + Bt + \cdots = 0, \\ Z_4 &= Ez + Ct + \cdots = 0, \\ S_4 &= Es + Dt + \cdots = 0, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

dans lequel E est différent de 0.

**6.** Lemme. *Équivalence du groupe* (4) *et* $T_1 = 0$ *et du groupe* (4) *et* $T_5 = 0$. — En éliminant au moyen des équations (4) les inconnues $x$, $y$, $z$, $s$ de l'équation

$$T_1 = a_5 x + b_5 y + c_5 z + d_5 s + e_5 t + f_5 u + \cdots = 0,$$

nous aurons

$$T_5 = ET_1 - a_5 X_4 - b_5 Y_4 - c_5 Z_4 - d_5 S_4 = Ft + F_1 u + F_2 v + \cdots = 0.$$

Le système $X_4 = 0$, $Y_4 = 0$, $Z_4 = 0$, $S_4 = 0$ et $T_1 = 0$ conduit donc à $T_5 = 0$ et, par conséquent, au système $X_4 = 0$, $Y_4 = 0$, $Z_4 = 0$, $S_4 = 0$ et $T_5 = 0$; et réciproquement, ce dernier système conduit à $ET_1 = 0$, et, comme nous supposons E différent de 0, à l'équation $T_1 = 0$, et par conséquent au système $X_4 = 0$, $Y_4 = 0$, $Z_4 = 0$, $S_4 = 0$ et $T_1 = 0$. Donc ces deux systèmes sont équivalents.

**7.** *Coefficients nuls.* — Si tous les coefficients de l'équation $T_5 = Ft + F_1 u + \cdots + F_4 k = 0$ sont nuls, l'équation $T_5 = 0$ devient $0 = 0$, identité qui n'apprend rien (*) et qui, en théorie, doit être supprimée. Le système formé du groupe (4) et $T_1 = 0$, équivalent à groupe (4) et $T_5 = 0$, devient également équivalent

(*) Dans les sciences d'observation on a souvent affaire à des équations qui ne sont pas d'une exactitude parfaite. Une équation à coefficients nuls peut alors avoir son prix, parce que son parfait accord avec les autres augmente la probabilité de l'exactitude de celles-ci. Mais nous n'avons pas à nous occuper de ces questions.

à groupe (4), l'équation $T_1 = 0$, peut être supprimée et les calculs devront être continués au moyen de la sixième équation du système (I). C'est évidemment la manière dont il faudrait traiter l'équation $X_1 = 0$, si tous ses coefficients étaient nuls. D'ailleurs si

$$T_5 = ET_1 - a_5X_4 - b_5Y_4 - c_5Z_4 - d_5S_4$$

est identiquement nul, l'équation $ET_1 = 0$ ou $T_1 = 0$ n'est qu'une simple conséquence (une combinaison linéaire) des équations (4) et n'exprime aucune relation nouvelle entre les inconnues.

Si tous les coefficients des inconnues qui se trouvent dans l'expression $T_5$ s'annulent et que le seul coefficient $F_4$ de $k$ (supposé être un nombre déterminé, différent de 0), soit également différent de 0, l'équation $T_5 = F_4k = 0$, est une absurdité, qui prouve que le système I dont elle serait une conséquence, doit renfermer des contradictions. On peut évidemment dire la même chose de l'équation $X_1 = 0$, si elle se réduisait à $i_1k = 0$, $i_1$ et $k$ étant différents de 0. Du reste si à l'exception de $F_4$ tous les coefficients de $T_5$ s'annulent, c'est-à-dire si les coefficients de l'expression

$$ET_1$$

sont tous, à l'exception de ceux de $k$, respectivement égaux à ceux de l'expression

$$a_5X_4 + b_5Y_4 + c_5Z_4 + d_5S_4,$$

l'équation

$$ET_1 = 0, \text{ ou } T_1 = 0$$

est incompatible avec l'équation

$$a_5X_4 + b_5Z_4 + c_5Z_4 + d_5S_4 = 0$$

et par conséquent incompatible avec le groupe (4) ou avec les quatre premières équations (I) dont cette équation est une conséquence.

**8.** *Équivalence du système* (5) *et du système* (I). — L'élimination de $t$ entre $T_5 = 0$ et les équations (4) nous donnera

$$\begin{aligned} FX_4 - AT_5 &= EFx + \cdots = 0, \\ FY_4 - BT_5 &= EFy + \cdots = 0, \\ FZ_4 - CT_5 &= EFz + \cdots = 0, \\ FS_4 - DT_5 &= EFs + \cdots = 0, \end{aligned}$$

et celles-ci divisées par E, qui est, par hypothèse, différent de 0, nous conduiront, si nous leur adjoignons $T_5 = 0$, au système

$$\left.\begin{aligned} X_5 &= Fx + \cdots = 0, \\ Y_5 &= Fy + \cdots = 0, \\ Z_5 &= Fz + \cdots = 0, \\ S^5 &= Fs + \cdots = 0, \\ T_5 &= Ft + \cdots = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

De même que les équations $T_5$ et celles du groupe (4) conduisent au système (5), celles-ci conduisent réciproquement d'abord naturellement à $T_5 = 0$, et aux équations $FX_4 = 0$, $FY_4 = 0$, $FZ_4 = 0$ et $FS_4 = 0$, et, comme nous supposons également que F n'est pas nul, au groupe (4) et $T_5 = 0$; et l'ensemble de ces cinq équations est, d'après le n° 6, équivalent au groupe (4) et $T_1 = 0$. Et, comme dans les équations des groupes antérieurs formés d'après les règles de notre méthode, les coefficients communs des premiers termes n'ont pu être nuls, le groupe (4) est équivalent au groupe (3) et $S_1 = 0$, le groupe (3) au groupe (2) et $Z_1 = 0$, le groupe (2) à $Y_1 = 1$ et $X_1 = 0$. D'où nous pouvons conclure que le système (5) est équivalent au système I.

**9.** *Systèmes de lettres qu'on peut regarder comme des inconnues qui dépendent des autres lettres. Systèmes de lettres auxquelles on ne peut pas attribuer des valeurs arbitraires.* — Traitons dans cet examen $k$ comme $x$, $y$, etc., c'est-à-dire comme une lettre qui peut désigner ou bien une inconnue ou bien un

nombre arbitraire servant à déterminer les inconnues. Soit le système

$$\left.\begin{aligned} X_5 &= Fx + \alpha u + \alpha_1 v + \alpha_2 w + \alpha_3 k = 0 \\ Y_5 &= Fy + \beta u + \beta_1 v + \beta_2 w + \beta_3 k = 0 \\ Z_5 &= Fz + \gamma u + \gamma_1 v + \gamma_2 w + \gamma_3 k = 0 \\ S_5 &= Fs + \delta u + \delta_1 v + \delta_2 w + \delta_3 k = 0 \\ T_5 &= Ft + \varepsilon u + \varepsilon_1 v = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . (5)$$

où nous supposons que F, $\varepsilon$ et $\varepsilon_1$ différents de 0, tandis que les coefficients de $w$ et $k$ dans l'expression $T_5$ sont nuls. Nous savons déjà que dans ces hypothèses nous pouvons exprimer les valeurs de $x, y, z, s, t$ ou de $x, y, z, s, u$ ou de $x, y, z, s, v$ en donnant des valeurs quelconques respectivement aux lettres $u, v, w, k$ ou à $t, v, w, k$ ou enfin à $u, t, w, k$. On a l'habitude d'ajouter qu'on ne peut pas exprimer les valeurs de $x, y, z, s, w$ ni de $x, y, z, s, k$ en fonction des autres lettres, parce que ces inconnues se trouveraient multipliées par 0 dans les équations qui devraient donner leurs valeurs. D'où l'on conclut qu'on ne peut, sans rendre les équations incompatibles, attribuer des valeurs arbitraires à toutes les lettres ni de la combinaison $t, u, v, k$, ni de la combinaison $t, u, v, w$. Observons d'abord qu'on peut dire plus généralement qu'on ne le peut pour aucune combinaison ($x, t, u, v$, par exemple), où entrent les trois lettres $t, u, v$, à cause de la relation que $T_5 = 0$ établit entre ces lettres.

Les inconnues de la combinaison $u, y, z, s, t$ qui résulte du changement d'une lettre de la combinaison $x, y, z, s, t$ peuvent être exprimées et peuvent seulement être exprimées en fonction de $x, v, w, k$ si, dans $X_5$, le coefficient $\alpha$ de $u$ est différent de 0, car on peut appliquer à l'équation $X_5 = 0$, ce que nous avons démontré pour $T_5 = 0$.

Les inconnues de la combinaison $u, v, z, s, t$ qui résulte du changement de deux lettres de la combinaison $x, y, z, s, t$ en deux autres lettres peuvent s'exprimer et peuvent seulement s'exprimer en fonction de $x, y, w, k$ si $(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)$ est différent de 0; $(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)$ est le coefficient commun de $u$ et de $v$ dans les deux équations déduites des équations $X_5 = 0$ et $Y_5 = 0$, qui expriment les valeurs de $u$ et de $v$ en fonction de $x, y, w, k$. Dans

cette hypothèse, on peut trouver $u$ et $v$ pour des valeurs arbitraires de $x, y, w, k$ et puis, en remplaçant $u$ et $v$ par leurs expressions en fonction de $x, y, w, k$ dans $Z_5$, $S_5$ et $T_5$, trouver également $z, s, t$ en fonction des lettres $x, y, w, k$. Si $(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta) = 0$, l'équation qui devait nous donner $u$ et $v$ exprime une simple relation entre $x, y, w, k$, qui ne permettra pas d'attribuer à chacune de ces lettres une valeur arbitraire. Et ainsi de suite.

**10.** *Équations homogènes.* — Supposons que dans le système I les coefficients de $u, v, w, k$ soient tous égaux à 0, de sorte qu'il se compose de cinq équations homogènes à cinq inconnues et qu'il est équivalent au système suivant :

$$\begin{aligned} X_4 &= Ex + At = 0, \\ Y_4 &= Ey + Bt = 0, \\ Z_4 &= Ez + Ct = 0, \\ S_4 &= Es + Dt = 0, \\ T_5 &= Ft = 0. \end{aligned}$$

Si $F = 0$, l'équation $T_5 = 0$ doit être supprimée et le système se réduit au système (4), et, d'après ce que nous venons de voir et ce qui se voit immédiatement, chacune des inconnues peut être regardée comme un nombre arbitraire duquel dépendent les valeurs des autres. Si F n'est pas nul, nous aurons

$$t = x = y = z = s = 0.$$

---

**11.** *Solutions générales des équations linéaires.* — La conversion de 2, 3, etc. équations en 2, 3, etc. autres équations qui expriment les valeurs de 2, 3, etc. inconnues en fonction des autres (1), conduit plus directement aux solutions générales que les méthodes ordinaires. La recherche de ces solutions nous fournira une nouvelle démonstration du principe des coefficients égaux. Ces solutions étant connues, nous serons dans cette étude aussi bref que possible. Naturellement nous ne nous baserons pas sur la théorie des déterminants, ce qui serait supposer connus les résultats que nous cherchons. Nous nous dispenserons

seulement de reproduire la démonstration très facile du principe suivant : Dans une permutation quelconque de différents chiffres, ceux-ci, comparés deux à deux, se suivront ou bien dans leur ordre naturel, ou bien le plus fort précédera l'autre. En nommant cette dernière position une inversion, on peut diviser les permutations en deux classes : celle des permutations paires, qui comprendra la permutation sans inversion et les permutations qui contiennent un nombre pair d'inversions et la classe des permutations impaires. Une permutation change de classe si l'on y échange un chiffre avec un autre. C'est uniquement la démonstration de ce théorème que nous supposons connue.

Les équations $X_1 = 0$ et $Y_1 = 0$ du système (I) nous donneront

$$\left.\begin{array}{l} X_2 = (a_1b_2 + a_2b_1)x + (c_1b_2 - c_2b_1)z + \cdots = 0 \\ Y_2 = (a_1b_2 - a_2b_1)y + (a_1c_2 - a_2c_1)z + \cdot\cdot = 0 \end{array}\right\} . \quad (2)$$

En éliminant $x$ et $y$ entre ces équations et l'équation $Z_1 = 0$ et en examinant la forme du coefficient de Z dans l'équation résultante, on observera facilement que les termes dont il se compose seront des produits de 3 facteurs, que les lettres de ces facteurs seront $a$, $b$, $c$ et les indices de ces lettres 1, 2, 3, qu'en les écrivant de manière que les lettres se suivent toujours dans le même ordre, par exemple dans l'ordre alphabétique, les indices formeront les différentes permutations qu'on peut former avec les chiffres 1, 2 et 3, et que les signes des termes dépendent de la classe de ces permutations. On remarquera également que les coefficients des équations (2) ont des propriétés analogues. Une étude plus approfondie nous aurait fait voir que ces propriétés des coefficients pouvaient être prévues *a priori*. Faisons cette étude d'une manière générale.

Désignons par $|a_1b_2c_3d_4|$ ou par $|b_2d_1c_3a_4|$ la somme algébrique de tous les termes dont la partie littérale (le mot formé par les lettres) est *abcd* ou *bdca*, dont les indices forment toutes les permutations (tous les nombres) qu'on peut former avec les chiffres 1, 2, 3, 4, et dont les signes soient + ou —, suivant que les permutations des indices seront de la même classe que la permutation du terme mis entre les barres, ou de la classe



opposée. Lorsque dans celle-ci les chiffres des indices se suivent dans leur ordre naturel, nous nous dispenserons de les écrire, de sorte que $|bcad| = |b_1c_2a_3d_4|$.

Supposons donc que le coefficient de $s$ dans l'équation $S_4 = 0$ soit $|abcd|$, il nous sera facile de démontrer que les équations (4) seront de la forme

$$\left.\begin{array}{l} X_4 = |abcd|x + |ebcd|t + \cdots = 0, \\ Y_4 = |abcd|y + |aecd|t + \cdots = 0, \\ Z_4 = |abcd|z + |abed|t + \cdots = 0, \\ S_4 = |abcd|s + |abce|t + \cdots = 0. \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (4).$$

Le coefficient de $s$ est $|abcd|$ par supposition.

En échangeant entre elles, dans les équations (I), $d_1, d_2, d_3$ et $d_4$ et $c_1, c_2, c_3, c_4$, ainsi que les coefficients $s$ et $z$, les mêmes opérations qui nous auront fait connaître cette valeur du coefficient de $s$ en fonction de $t$, etc., nous auraient donné la valeur de $z$ en fonction de $t$, etc., de sorte que le coefficient de $z$ peut se déduire de celui de $s$ par l'échange de $d$ en $c$ et de $c$ en $d$, et il sera $|abdc|$.

A chaque terme de $|abdc|$ correspond un terme de $|abcd|$ et un seul terme, composé des mêmes facteurs, et réciproquement; par exemple, au terme $\pm a_m b_n d_1 c_3$ correspond le terme $\pm a_m b_n c_3 d_1$, et réciproquement. Mais ces deux termes seront de signes différents, parce que l'échange de 1 et 3 change les classes et que dans les deux coefficients ceux de la classe paire sont positifs. Donc $|abdc| = - |abcd|$, ce qui ne peut pas nous empêcher d'écrire l'équation sous la forme $|abcd|\ z +$ etc. $= 0$. Le même raisonnement s'applique aux coefficients de $y$ et de $x$.

De quelque manière qu'on ait éliminé $x$, $y$ et $z$ pour trouver l'équation $S_4 = 0$, le coefficient de $t$ ne peut différer de celui de $s$ que par le changement des lettres $d$ en $e$ et doit par conséquent être $|abce|$, si le premier est $|abcd|$. En appliquant la même observation aux trois autres équations, on voit que dans celles-ci il doit être $|ebcd|$, $|aecd|$ et $|abed|$.

L'élimination simultanée de $x, y, z, s$ entre les équations (4) et $T_1 = 0$ conduira (3) à une équation où $t$ aura le coefficient

$$|abcd|e_5 - |abce|d_5 - |abed|c_5 - |aecd|b_5 - |ebcd|a_5.$$

$|abcd|\, e_5$ se compose de tous les termes de $|abcde|$ où l'indice 5 est attaché à la lettre $e$. Or $-|abce|\, d$ se compose de tous les termes de $-|abced|$, où l'indice 5 est attaché à la lettre $d$, ou bien, comme d'après l'observation que nous venons de faire $-|abced| = |abcde|$, de tous les termes de $|abcde|$, où l'indice 5 est attaché à la lettre $d$. De même $-|abed|\, c_5$, $-|aecd|\, b_5$, $-|ebcd|\, a_5$ se composent de tous les termes de $|abcde|$, où l'indice 5 est attaché aux lettres $c$, $b$ et $a$.

Donc la somme des termes du coefficient de $t$ est égale à la somme des termes de l'expression $|abcde|$ où l'indice 5 est attaché à l'une ou l'autre des lettres $a$, $b$, $c$, $d$ et $e$, c'est-à-dire égal à $|abcde|$.

Les deux premières équations (I) conduisent à l'expression générale des valeurs de $x$ et $y$, multipliées par $|ab|$; donc les trois premières conduisent aux valeurs de $x$, $y$ et $z$, multipliées par le coefficient commun $|abc|$, et par conséquent les quatre premières aux valeurs de $x$, $y$, $z$ et $s$, multipliées par $|abcd|$, etc. Ce qui démontre le principe des coefficients égaux et indique leurs valeurs.

On en déduit facilement la règle suivante : pour tirer de cinq équations les valeurs de cinq inconnues $x$, $y$, $z$, $s$, $t$, exprimées en fonction des autres inconnues (ou lettres), $u$, $v$, $w$, $k$, former l'expression $|a_1\, b_2\, c_3\, d_4\, e_5|$, où les lettres se rapportent aux coefficients de $x$, $y$, $z$, $s$, $t$ dans les équations (I). Cette expression sera le coefficient commun de $x$, $y$, $z$, $s$ et $t$. Les coefficients de $u$, $v$, $w$, $k$, dans chacune des cinq équations, se trouveront, en changeant dans le coefficient de l'inconnue, la lettre qui se rapporte à cette inconnue, en celle, qui se rapporte à $u$, $v$, $w$ et $k$. De sorte que ces équations seront

$$|abcde|x + |fbcde|u + |gbcde|v + \cdots = 0$$
$$|abcde|y + |afcde|u + |agcde|v + \cdots = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et pour

$$u = 1, \quad v = w = k = 0,$$
$$|abcde|x + |fbcde| = 0, \text{ etc.}$$

**12.** *Avantages de la méthode.*— Les $p$ équations déduites par cette méthode des $p$ premières équations d'un système de $n$

équations à $(n+1)$ termes, auront chacune $(n-p+2)$ termes. Pour passer du système de ces $p$ équations à celui de $(p+1)$ équations à $(n-p+1)$ termes, nous devrons 1° éliminer simultanément au moyen de ces $p$ équations $p$ inconnues de la $(p+1)^e$ équation (I). En faisant abstraction des termes à éliminer, dont nous pouvons nous dispenser de calculer les coefficients, parce qu'ils devront se détruire deux à deux, nous aurons dans chacune des $p$ équations du système $p$ et dans la $(p+1)^e$ équation (I) à multiplier $(n-p+1)$ termes, par conséquent, à faire $(p+1)(n-p+1)$ multiplications ; 2° nous devrons, entre l'équation à $(n-p+1)$ termes, qui résulte de cette élimination, et chacune des $p$ équations du groupe $(p)$, éliminer une nouvelle inconnue. Nous ne multiplierons ni les premiers termes des équations $(p)$ (ceux de l'inconnue qui ne se trouve pas dans l'équation à $n-p+1$ termes), ni les deux termes qui devront être éliminés, mais nous nous contenterons d'indiquer les multiplications à faire. Pour chacune des $p$ éliminations nous aurons à faire $2(n-p)$, ou en tout, $2p(n-p)$ multiplications.

Le nombre des multiplications que nous aurons à faire pour passer successivement d'une équation à $(n+1)$ termes à un système de 2 équations à $n$ termes, puis à un système de 3 équations à $(n-1)$ termes, etc., jusqu'au système de $n$ équations à 2 termes, qui nous donne les solutions des équations (I), sera égal à la somme de toutes les valeurs de

$$(p+1)(n-p+1)+2p(n-p),$$

en y supposant successivement $p=1$, $p=2$, etc., et $p=n-1$ et sera

$$\sum \left\{(p+1)(n-p+1)+2p(n-p)\right\} = \frac{n^3+2n^2-n-2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)(n-1)}{2}.$$

D'après la méthode ordinaire, par addition et soustraction :

1° Pour éliminer une inconnue entre deux équations à $p$ inconnues ou à $(p+1)$ termes, il faudra, en faisant abstraction des deux termes de ces inconnues, qui doivent s'entre-détruire, multiplier $p$ termes de chacune des deux équations ou faire $2p$

multiplications. Pour réduire un système de $p$ équations à un système de $(p - 1)$ équations, il faut $(p - 1)$ fois répéter cette opération ou faire $2p\,(p - 1)$ multiplications. Pour passer successivement d'un système de $n$ équations à un système de $(n - 1)$, de celui-ci à un système de $(n - 2)$ inconnues, etc., et enfin d'un système de 2 équations à 2 inconnues à une équation à une inconnue, faire $\Sigma 2p(p - 1)$ multiplications, en désignant par cette expression la somme de toutes les valeurs de $2p(p - 1)$ pour $p = 2$, $p = 3$, etc., et $p = n$.

Après avoir trouvé les équations $mx + n = 0$, $oy + p = 0$, etc., qui donnent les valeurs de $(p - 1)$ inconnues, on devra, pour trouver la $p^e$, éliminer d'abord $x$ entre une équation à 2 termes et une équation à $(p + 1)$ termes, puis $y$ entre une équation à 2 et une équation à $p$ termes, etc., et finalement la $(p - 1)^e$ inconnue entre une équation à 2 et une autre à 3 termes, et par conséquent faire $(1 + p) + p + (p - 1) + \dots + 3 = \frac{(p + 4)(p - 1)}{2}$ multiplications. Pour tirer de cette manière la valeur d'une seconde inconnue d'une équation à 2 inconnues, celle d'une troisième d'une équation à 3 inconnues, etc., et la $n^e$ d'une équation à $n$ inconnues, on aura un nombre de multiplications à faire qui s'exprimera par la somme de toutes les valeurs de $\frac{(p + 4)(p - 1)}{2}$ pour $p = 2$, $p = 3$... et $p = n$. Cette méthode exige donc

$$\sum \left\{ 2p\,(p - 1) + \frac{(p + 4)(p - 1)}{2} \right\} = \frac{5n^3 + 6n^2 - 11n}{6}$$

multiplications.

Le rapport entre les deux nombres que nous venons de trouver est

$$\frac{3n^3 + 6n^2 - 3n - 6}{5n^3 + 6n^2 - 11n} = \frac{3n^2 + 9n + 6}{5n^2 + 11n}.$$

Les divisions que notre méthode impose ne doivent pas être regardées comme une charge dont la méthode ordinaire dispense le calculateur, mais comme un très grand avantage, même comme un avantage plus précieux que celui de la réduction des opérations. Les divisions ne simplifient pas seulement les calculs, mais lorsqu'elles donnent des quotients entiers, elles fournissent une

preuve d'un très grand poids de la justesse des calculs. Il est très probable qu'une erreur dans un nombre sera indiquée aussitôt que ce nombre concourra à former un autre nombre qui devra être divisible par un nombre tant soit peu élevé, et si ce n'était pas le cas pour le premier nombre qui dépend du nombre inexact, il est en général encore beaucoup plus probable que l'erreur sera indiquée dans les calculs subséquents. En désignant les coefficients mal calculés, elle facilite aussi beaucoup la recherche des erreurs. Sans doute il y a moyen d'indiquer également pour les méthodes ordinaires les facteurs à supprimer, et nous allons le faire. Mais les erreurs y sont moins immédiatement reconnues et la recherche en est plus compliquée.

**13.** *Méthodes ordinaires. Facteurs communs.* — Pour compléter cette étude, nous indiquerons une manière d'employer les méthodes ordinaires, qui fera découvrir facilement les facteurs communs qu'elles introduisent dans les équations. Nous déduirons un système de $(m-1)$ équations à $(m-1)$ inconnues d'un système de $m$ équations à $m$ inconnues, en choisissant dans la première équation de celui-ci une inconnue dont le coefficient soit différent de 0, pour éliminer cette inconnue entre cette équation et chacune des autres du même système. De cette manière nous passerons successivement du système primitif I, en supposant, comme nous venons de le dire, $a_1$, $\beta_1$, $C_1$ différents de 0, aux systèmes

$$\left.\begin{array}{l} \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 s + \cdots = 0, \\ \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 s + \cdots = 0, \\ \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3 s + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

où l'on a

$$\begin{array}{ll} \beta_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1; & \gamma_1 = a_1 c_2 - a_2 c_1; \text{ etc.} \\ \beta_2 = a_1 b_3 - a_3 b_1; & \gamma_2 = a_1 c_3 - a_3 c_1; \text{ etc.} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} C_1 z + D_1 s + E_1 u + \cdots = 0, \\ C_2 z + D_2 s + E_2 u + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

où

$$C_1 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1; \quad D_1 = \beta_1\delta_2 \quad \beta_2\delta_1; \text{ etc.}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left.\begin{array}{r} M_1 s + N_1 u + \cdots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots = 0, \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

où

$$M_1 = C_1 D_2 - C_2 D_1; \quad N_1 = C_1 E_2 - C_2 E_1; \text{ etc.}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Tous les coefficients du système (III) sont divisibles par $a_1$. En effet, nous avons, par exemple

$$C_1 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_1 c_3 - a_3 c_1) - (a_1 b_3 - a_3 b_1)(a_1 c_2 - a_2 c_1)$$

et l'on voit sans peine que les seuls des huit termes de ces produits, qui ne sont pas divisibles par $a_1$

$$-\, a_2 b_1 a_3 c_1 \quad \text{et} \quad +\, a_3 b_1 a_2 c_1$$

se détruisent.

Les coefficients du système (IV), qui a été déduit des systèmes (II) et (III) absolument comme le système (III) l'a été des systèmes (I) et (II), doivent par conséquent être divisibles par $\beta_1$. Ajoutons qu'ils ne perdent pas ce facteur commun, si on les déduit des coefficients du système (III) divisés par $a_1$. En effet, on obtiendra alors les coefficients $M_1$, $N_1$, etc., divisés par $(a_1)^2$, qui ne peuvent, par cette division, cesser d'être divisibles par $\beta_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1$, quantité première avec $a_1$. On pourrait du reste, par le calcul de leurs valeurs, démontrer directement cette divisibilité. On divisera donc le système (III) par $a_1$, de ce nouveau système (3) on déduira un nouveau système

$$\left.\begin{array}{r} m_1 s + n_1 u + \cdots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots = 0, \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (4)$$

qu'on divisera par $\beta_1$. Le système (5) qui sera déduit des systèmes II, (3) et (4) absolument comme le système (4) le fut des systèmes I, (II) et (3), sera divisé par le coefficient de Z qui a servi à former le système (4) (c'est-à-dire $C_1 : a_1$), et ainsi de suite.

Il n'est peut-être pas superflu d'observer que ce raisonnement suppose qu'on ait commencé les opérations par chasser les dénominateurs et que l'élimination se fasse suivant la méthode générale, de la manière que nous avons expliquée à la fin du n° 4.

## II

### Démonstration par la théorie des déterminants. Calcul des déterminants.

**14.** *Expression des déterminants en fonction de leurs mineurs.* Nous avons vu (11) que

$$|abcde| = |abcd|e_5 - |abce|d_5 - |abed|c_5 - |aecd|b_5 - |ebcd|a_5.$$

Cette formule ne diffère que par sa forme de la formule

$$|abcde| = |abcd|e_5 - |abce|d_5 + |abde|c_5 - |acde|b_5 + |bcde|a_5,$$

qu'on emploie ordinairement pour décomposer un déterminant en produits d'éléments d'une ligne par les mineurs qui leur correspondent. Pour déduire la première de la seconde, il faudrait faire avancer *e* dans le 3° terme de celle-ci d'un rang, dans le 4° de 2, dans le 5° de 3 rangs et ainsi de suite, si le déterminant était d'un ordre supérieur; et comme cela change alternativement les signes des déterminants, changer, à partir du 3° terme du second membre, les signes des termes de rang impair qui sont positifs et maintenir les signes des autres qui sont négatifs. Il se pourrait que dans d'autres recherches encore, la première forme de la formule fût plus commode, parce que la règle des signes s'énonce plus facilement.

**15.** *Corollaire I.* — Si la ligne 5 est identique avec une des autres lignes, la ligne 3 par exemple, | *abcde* | s'annule et la première formule devient

$$|abcd|e_3 = |abce|d_3 + |abed|c_3 + |aecd|b_3 + |ebcd|a_3.$$

Donc un déterminant, multiplié par un élément d'une colonne qu'il ne contient pas, mais appartenant à une ligne qu'il renferme,

est égal à la somme des produits analogues qu'on peut former en permutant successivement chaque lettre du premier avec la lettre de cet élément.

**16.** *Corollaire II.* — Ce principe peut être généralisé de la manière suivante : Le produit de deux déterminants dont le premier contient toutes les lignes (chiffres) du second, est égal à la somme des produits analogues qu'on peut former en permutant successivement la même lettre du premier avec chaque lettre du second. C'est ainsi, par exemple, que

$$|mno|\,|abcd|$$
$$= |mna|\,|obcd| + |mnb|\,|aocd| + |mnc|\,|abod| + |mnd|\,|abco|.$$

En effet, pour chaque terme du premier déterminant, par exemple pour $- m_2 n_1 o_3$ l'équation

$$- m_2 n_1 o_3 |abcd| = - m_2 n_1 a_3 |obcd| - m_2 n_1 b_3 |aocd|$$
$$- m_2 n_1 c_3 |abod| - m_2 n_1 d_3 |abco|$$

subsiste et n'est autre chose que l'équation du numéro précédent, multipliée par $-m_2\, n_1$ ; donc l'égalité existe pour la somme de tous les termes de $|\, mno \,|$ multipliés par $|\, abcd \,|$, comme elle est exprimée par l'équation précédente.

D'après une observation qui m'a été faite, ce principe est connu (*).

**17.** *Théorème concernant le principe de la divisibilité.* — La démonstration directe de la divisibilité, sur laquelle notre méthode est basée (4), se déduit facilement du corollaire II, d'après lequel

$$|abmn|\,|abcde| = |aban|\,|mbcde| + |abbn|\,|amcde| + |abcn|\,|abmde|$$
$$+ |abdn|\,|abcme| + |aben|\,|abcdm|$$
$$= |abcn|\,|abmde| + |abdn|\,|abeme| + |aben|\,|abcdm|$$

parce que les facteurs $|\, aban \,|$ et $|\, abbn \,|$ s'annulent, comme ayant deux colonnes égales. Il s'ensuit que lorsque dans l'équa-

(*) En effet, M. P. Mansion le mentionne deux fois dans ses *Éléments de la théorie des déterminants*, 4e édition. Exercices 34 et 38.

tion du numéro précédent les deux déterminants du premier membre ont une ou plusieurs lettres (colonnes) communes, il suffit, pour trouver le second membre, de permuter successivement une des lettres qui se trouvent uniquement dans le premier déterminant, avec chacune des lettres du second, qui se trouvent uniquement dans celui-ci. Nous n'avons besoin de ce théorème que sous la forme suivante :

$$|abcf|\,|abcde| = |abcd|\,|abcfe| + |abce|\,|abcdf| \quad (*),$$

c'est-à-dire le *produit de deux déterminants, le premier de* n *et le second de* (n + 1) *lignes, et dont le second comprend toutes les lignes* (*chiffres*), *et toutes les colonnes* (*lettres*) *moins une, du premier, est égal à la somme des deux déterminants analogues, qui se déduisent du premier, en permutant la lettre particulière au premier avec chacune des deux lettres particulières au second.*

Donc la division de

$$|abcf|\,|abcde| - |abce|\,|abcdf| \text{ par } |abcd|$$

doit nous donner le quotient $|abcfe|$, qui est un nombre entier, si tous les éléments des déterminants sont des nombres entiers.

**18.** *Démonstration de la méthode.* — L'élimination de $x$, $y$, $z$ et $s$ entre les équations (4) du n° 3 et l'équation

$$T_1 = 0,$$

conduit, d'après (11), à l'équation

$$T_5 = |abcde|\,t + |abcdf|\,u + \cdots = 0,$$

---

(*) En écrivant cette formule sous la forme

$$|abcf|\,|abcde| = |abce|\,|abcdf| - |abcd|\,|abcef|$$

et en posant

$$f_4 = 1,$$
$$f_1 = f_2 = f_3 = f_5 = 0,$$

nous aurons

$$|abc|\,|abcde| = |a_1b_2c_3d_4|\,|a_1b_2c_3e_5| - |a_1b_2c_3e_4|\,|a_1b_2c_3d_5|.$$

C'est, au fond, une formule trouvée par Stùdnicka, qui réduit le calcul d'un déterminant au calcul de quatre mineurs et d'un mineur de ces mineurs En l'appliquant au calcul des déterminants, on sera exactement ramené aux opérations des méthodes ordinaires d'élimination.

et l'élimination de $t$ entre celle-ci et

$$S_4 = |abcd|s + |abce|t + | |abcf|u + \cdots = 0$$

nous donne

$$|abcd|abcde|s$$
$$+ \{ |abcf|\ |abcde| - |abce|\ |abcdf| \} u + \cdots = 0$$

Ou, comme

$$|abcf|\ |abcde| = |abcd|\ |abcfe| + |abce|\ |abcdf|,$$
$$|abcd|\ |abcde|s + |abcd|\ |abcfe|u + \cdots = 0\,;$$

et, si $|abcd|$ n'est pas nul, on a

$$S_5 = |abcde|s + |abcfe|u + \cdots = 0.$$

On trouvera de même

$$Z_5 = |abcde|z + |abfde|u + \cdots = 0,$$
$$Y_5 = |abcde|y + |afcde|u + \cdots = 0,$$
$$X_5 = |abcde|x + |fbcde|u + \cdots = 0.$$

**19.** *Vérification des valeurs. Équivalence des systèmes* (I) *et* (5). — En remplaçant $x, y, z, s, t$ dans une des cinq premières équations (I), multipliée par $|abcde|$, par exemple dans $Z_1 = 0$, nous aurons

$$|abcde|Z_1 = \{ |abcde|f_3 - |abcdf|e_3 - |abcfe|d_3 - |abfde|e_3$$
$$- |afcde|b_3 - |fbcde|\ a_3 \} u + \cdots = 0.$$

Le coefficient de $u$ sera 0 (16), et il en sera de même des coefficients des autres inconnues ou lettres, de sorte que l'équation précédente se réduira à

$$|abcde|Z_1 = 0,$$

et si $|abcde|$ n'est pas nul, à

$$Z_1 = 0.$$

Donc, le système (5), déduit des cinq premières équations du système primitif, y conduit aussi, si $|abcde|$ est différent de 0, et il est, par conséquent, équivalent à l'ensemble de ces cinq équations. Ce raisonnement prouve la justesse de la méthode exposée au n° 4, et il indique les conditions requises pour qu'elle soit praticable.



**20.** *Calcul des déterminants.* — Résoudre des équations linéaires, c'est calculer des déterminants. Les résoudre par la méthode du n° 2 reviendrait à calculer des déterminants au moyen de leurs mineurs et des mineurs de ceux-ci, etc. Les méthodes générales dont on se sert en pratique pour calculer des déterminants qui dépassent le 3[e] degré se réduisent aux opérations de la résolution des équations linéaires par les méthodes ordinaires. (V. Günther, *Determinanten-Theorie*, 2[e] éd., p. 104.)

Il serait plus avantageux de réduire ce calcul aux opérations de la méthode d'élimination, que nous venons d'exposer.

Le tableau suivant indiquera ces opérations pour un déterminant de six colonnes, par des équations à résoudre, dont nous avons démontré la justesse (14 et 17); nous y soulignerons les inconnues à déterminer au moyen d'éléments, ou de déterminants trouvés par les équations antérieures, et nous désignerons les équations par les signes qui, d'après la notation que nous avons constamment employée, désigneraient les équations correspondantes dans la résolution d'un système de six équations linéaires homogènes à six inconnues.

$$Y_2$$

$$\underline{|ab|} = a_1b_2 - a_2b_1$$
$$\underline{|ac|} = a_1c_2 - a_2c_1$$
$$\underline{|ad|} = a_1d_2 - a_2d_1$$
$$\underline{|ae|} = a_1e_2 - a_2e_1$$
$$\underline{|af|} = a_1f_2 - a_2f_1$$

$$X_2$$

$$c_1|ab| = a_1\underline{|cb|} + b_1|ac|$$
$$d_1|ab| = a_1\underline{|db|} + b_1|ad|$$
$$e_1|ab| = a_1\underline{|eb|} + b_1|ae|$$
$$f_1|ab| = a_1\underline{|fb|} + b_1|af|$$

$$Z_3$$

$$\underline{|abc|} = c_3|ab| - b_3|ac| - a_3|cb|$$
$$\underline{|abd|} = d_3|ab| - b_3|ad| - a_3|db|$$
$$\underline{|abe|} = e_3|ab| - b_3|ae| - a_3|eb|$$
$$\underline{|abf|} = f_3|ab| - b_3|af| - a_3|fb|$$



**$Y_3$**

$$|ad|\ |abc| = |ab|\ |adc| + |ac|\ |abd|$$
$$|ae|\ |abc| = |ab|\ |aec| + |ac|\ |abe|$$
$$|af|\ |abc| = |ab|\ |afc| + |ac|\ |abf|$$

**$X_3$**

$$|db|\ |abc| = |ab|\ |dbc| + |cb|\ |abd|$$
$$|eb|\ |abc| = |ab|\ |ebc| + |cb|\ |abe|$$
$$|fb|\ |abc| = |ab|\ |fbc| + |cb|\ |abf|$$

**$S_4$**

$$|abcd| = d_4|abc| - c_4|abd| - b_4|adc| - a_4|dbc|$$
$$|abce| = e_4|abc| - c_4|abe| - b_4|aec| - a_4|ebc|$$
$$|abcf| = f_4|abc| - c_4|abf| - b_4|afc| - a_4|fbc|$$

**$Z_4$**

$$|abe|\ |abcd| = |abc|\ |abed| + |abd|\ |abce|$$
$$|abf|\ |abcd| = |abc|\ |abfd| + |abd|\ |abcf|$$

**$Y_4$**

$$|aec|\ |abcd| = |abc|\ |aecd| + |adc|\ |abce|$$
$$|afc|\ |abcd| = |abc|\ |afcd| + |adc|\ |abcf|$$

**$X_4$**

$$|ebc|\ |abcd| = |abc|\ |ebcd| + |dbc|\ |abce|$$
$$|fbc|\ |abcd| = |abc|\ |fbcd| + |dbc|\ |abcf|$$

**$T_5$**

$$|abcde| = e_5|abcd| - d_5|abce| - c_5|abed| - b_5|aecd| - a_5|ebcd|$$
$$|abcdf| = f_5|abcd| - d_5|abcf| - c_5|abfd| - b_5|afcd| - a_5|fbcd|$$

**$S_5$**

$$|abcf|\ |abcde| = |abcd|\ |abefe| + abce|\ |abcdf|$$

**$Z_5$**

$$|abfd|\ |abcde| = |abcd|\ |abfde| + |abcd|\ |abcdf|$$

$$Y_5$$

$$|afcd|\ |abcde| = |abcd|\ |\underline{afcde}| + |abcd|\ |abcdf|$$

$$X_5$$

$$|fbcd|\ |abcde| = |abcd|\ |\underline{fbcde}| + |ebcd|\ |abcdf|$$

$$U_6$$

$$|\underline{abcdef}| - f_6|abcde| - e_6|abcdf| - d_6|abcfe| - c_6|abfde|$$
$$- b_6|afcde| - a_6|fbcde|.$$

On ne se contentera pas d'indiquer, sous forme de quotient, les valeurs des inconnues qui se trouvent dans les seconds membres de ces équations. Si tous les éléments sont des nombres entiers, ces déterminants devront également être entiers.

Mais pour que les équations qui donnent leurs valeurs ne deviennent pas illusoires, il faut que ni $a_1$, l'un quelconque des coefficients de la première équation (I), ni $|ab|$, l'un quelconque des premiers membres de $Y_2$, ni $|abc|$, l'un quelconque des premiers membres de $Z_3$, ni $|abcd|$, l'un quelconque des premiers membres de $S_4$ ne soit nul.

Supposons que $|ab|$ soit différent de 0 et que tous les premiers membres des équations $Z_3$ s'annulent; tous les déterminants qui comprennent les trois lignes 1, 2 et 3, par exemple $|bcdef|$, s'annuleront. Car, en employant un moyen dont nous nous sommes déjà servi pour transformer des formules, nous aurons

$$|abm|\ |bcdef| = |abc|\ |bmdef| + |abe|\ |bcmef| + |abe|\ |bcdmf|$$
$$+ |abf|\ |bcdem|,$$

et pour

$$m_1 = m_2 = 0 \quad \text{et} \quad m_3 = 1,$$
$$|ab|\ |bcdef| = 0;$$

et comme, par supposition, $|ab|$ est différent de 0,

$$|bcdef| = 0.$$

# TROIS CAS
DE
# TUMEURS DES FOSSES NASALES
OPÉRÉES PAR

le Dr Ch. GORIS.

Observations présentées à la Société scientifique de Bruxelles, avril 1888.

## I

### SARCOME GLOBO-CELLULAIRE DE L'APOPHYSE BASILAIRE.

Voici en peu de mots l'histoire de la malade à laquelle j'ai enlevé la tumeur que j'ai l'honneur de vous présenter.

L'affection datait déjà d'assez longtemps. C'est au mois de mai 1884 que la patiente s'aperçut pour la première fois d'une gêne dans le nez : celui-ci s'était peu à peu obstrué et n'avait enfin plus permis le passage de l'air. Ma malade consulta alors un chirurgien qui, après des pourparlers assez longs, la décida à se laisser opérer. Nous étions alors en juillet 1884. Voici en quoi consista l'opération : Incision de la peau de la face dans le sillon séparant la joue du nez, partant de l'angle interne de l'œil, contournant l'aile du nez, suivant le sillon naso-labial jusque sous la cloison et descendant verticalement de celle-ci pour aboutir au lobule de la lèvre supérieure. Puis dissection de la joue jusque sur le maxillaire et résection d'un coin de cet os compris entre la ligne médiane et la première molaire; enfin extraction, par cette ouverture, de la tumeur obstruant la fosse nasale. Je ne sais quels étaient le volume et la forme de cette tumeur, la malade n'ayant pu me renseigner à cet égard.

La patiente fut pendant quelque temps débarrassée de son mal, mais pas bien longtemps. En effet la difficulté de respirer par le nez reparut au mois de janvier 1885, cinq mois donc après l'opération. La malade ne consulta pas,e t attendit que le mal eût fait des progrès tels que la respiration, la phonation et la déglutition en étaient fort gênées. C'est alors que la patiente retourna chez le chirurgien qui l'avait opérée; mais ce praticien jugea que le cas n'était plus opérable. La malade, sur le conseil d'une de ses amies, s'adressa à moi (avril 1887). Voici ce que je constatai :

La malade est âgée de 45 ans. La face est pâle, amaigrie, légèrement bouffie, de couleur jaune pâle. La joue gauche est un peu plus enflée que la droite. L'apophyse montante du maxillaire supérieur gauche est excurvée; la narine correspondante gonflée, comme chez les personnes possédant des polypes; de cette narine sortent des fongosités molles, saignant au moindre attouchement et sécrétant une sanie fétide. De ce côté, la narine est tellement obstruée par des fongosités que l'examen rhinoscopique antérieur est impossible. Du côté droit, le nez a extérieurement un aspect normal; mais intérieurement des bourgeons, mollasses comme les autres, le remplissent également.

L'examen de la bouche me montre à la voûte palatine un point de ramollissement de l'os de 3 à 4 millimètres carrés d'étendue. L'ouverture laissée par la résection partielle de l'os est restée fistuleuse. Dans le pharynx se trouve une tumeur en battant de cloche, refoulant la voûte du palais en avant, sans adhérence avec lui, et le débordant en bas d'un centimètre et demi. Cette tumeur est mobile dans le sens latéral; sa consistance, je ne puis mieux la comparer qu'à celle d'une poire mûre non pelée. Superficiellement le stylet rencontre une légère résistance (nous verrons tout à l'heure à quoi elle est due), puis s'y enfonce avec facilité. Les points de contact du stylet saignent très facilement.

Comme la malade se plaint d'*atroces* douleurs lancinantes dans l'oreille droite, j'examine cet organe. Une sanie fétide, analogue à celle que produit le nez, remplit le conduit auditif; le tympan a disparu; la caisse du tympan se trouve remplie de fongosités molles, pâles et saignantes, comme celles dont j'ai parlé tantôt.

La voix est nasonnante; de plus, la tumeur qui pend dans la gorge rend la déglutition et la respiration très difficiles.

Nous nous trouvions en face d'un cas où le diagnostic n'était pas des plus aisés.

D'un côté, le teint cachectique de la malade, l'extension du mal aux deux maxillaires et à l'oreille, les fongosités de mauvais aspect pouvaient nous porter à ranger l'affection dans la classe des tumeurs malignes, telles que le carcinome et le sarcome.

D'un autre côté, la longue durée du mal (3 ans), l'absence complète de ganglions pouvaient nous faire espérer que nous avions affaire à un myxome ou à un fibro-myxome.

Que pouvaient la chirurgie ou la thérapeutique dans un pareil cas?

Pour guérir la malade, quelle que fût la nature de son affection, il eût fallu enlever tout le mal, c'est-à-dire, faire une résection double des maxillaires, poursuivre l'affection jusque dans la caisse du tympan; ce qui était impossible, à cause de l'état cachectique de la malade.

Je me décidai à faire une opération palliative qu'autorisait parfaitement l'état de gène où se trouvaient la respiration et la déglutition, par suite de la tumeur qui occupait le pharynx. Je résolus d'étrangler et de couper le néoplasme à son point d'insertion, au moyen de l'anse galvanique.

Lorsqu'il s'agit d'une tumeur d'une certaine résistance, le placement du fil de platine est relativement aisé. En effet, il suffit de donner à l'anse une forme ovoïde, et d'en introduire le bout libre entre le voile du palais et la tumeur. La résistance de celle-ci fait glisser le fil entre le voile et elle-même, de sorte qu'en imprimant à l'instrument de légers mouvements latéraux combinés avec une poussée modérée dans le sens antéro-postérieur, le bout de l'anse va se placer assez facilement au point d'insertion du néoplasme. Il faut, pour réussir, employer un fil de $0^m,001$ de diamètre.

J'essayai ce procédé; je ne réussis pas et voici pourquoi: l'anse, au lieu de glisser sur la face antérieure de la tumeur, y pénétra. Je pris alors le fil de platine entre l'ongle et la pulpe de l'index

droit, et j'allai le placer, en me guidant sur le toucher, au point d'insertion de la tumeur, c'est-à-dire à la symphyse sphéno-basilaire. Je maintins le fil en cet endroit, pendant qu'un confrère, enfonçant l'instrument dans le sens horizontal, amenait l'anse derrière la tumeur. Le serrement du fil suffit à étrangler et à détacher le pédicule qui était fort friable, de sorte que je n'eus pas même l'occasion d'utiliser le courant électrique. L'hémorragie fut très modérée. Je cautérisai le point d'insertion au moyen du cautère galvanique courbe.

Voici les caractères de la tumeur, qui à l'état frais avait la grosseur d'un œuf de poule :

La grosse extrémité de l'ovoïde, qui pendait dans le pharynx, présente une surface lisse et légèrement résistante, due à une capsule qui la recouvre entièrement. Cette partie, qui forme les deux tiers de la tumeur, est nettement séparée du tiers supérieur par un sillon assez profond. Cette dernière partie est irrégulièrement lobulée; tous les lobules sont encapsulés. Sur une coupe macroscopique à l'état frais, la tumeur était tout à fait semblable comme couleur, comme structure, comme consistance, à la glande sous-maxillaire; la capsule enveloppant la tumeur envoie à l'intérieur des travées séparant des lobules semblables à ceux de la glande salivaire. Le raclage de la surface de section n'amène pas de suc; la pulpe de la tumeur est fort friable.

L'examen microscopique de la tumeur m'a démontré que j'avais eu affaire à un sarcome globo-cellulaire.

Un mot maintenant, bien court, au sujet des procédés opératoires qui conviennent dans les cas de tumeurs des cavités nasale et nasopharyngienne.

Avant tout il s'agit de faire un diagnostic précis. La tumeur est-elle bénigne, s'agit-il d'un fibrome, d'un chondrome, d'un ostéome : une résection partielle du maxillaire, « pour donner du jour », ou même l'enlèvement pur et simple du néoplasme soit en une fois, soit par portions, sont des procédés convenables.

Mais il n'en est plus de même lorsque l'affection est sarcomateuse ou carcinomateuse. Le diagnostic de tumeur maligne une

fois posé, une résection partielle sera presque toujours une opération incomplète; je crois qu'il ne faut jamais s'y borner. S'il nous est possible d'enlever tout le terrain où végète le néoplasme, n'est-il pas bien plus sûr d'enlever et la terre et la semence? Le précepte est d'autant plus sage que la résection partielle du maxillaire est une opération à peu près aussi grave que la résection totale, et que, comme je viens de le dire, elle risque fort de laisser de la mauvaise graine.

C'est ce qui est arrivé dans le cas que je vous ai exposé, et c'est même en grande partie pour cela que je vous en ai entretenu. Une résection totale eût laissé à la patiente quelque chance de guérison; la résection cunéiforme si douloureuse qu'elle a subie n'a pas même réussi à retarder la marche de son affreux mal.

## II

### FIBROME NASOPHARYNGIEN.

Cette tumeur-ci, je l'ai enlevée à un malade que j'avais déjà débarrassé de dix-huit polypes muqueux. Les fosses nasales étaient libres, l'inspiration se faisait bien, mais à l'expiration l'air ne passait pas encore.

A l'état frais, la tumeur avait une longueur de 6 centimètres, et l'épaisseur du pouce.

Son volume s'est réduit par la macération dans l'alcool. Sa résistance n'est pas tout à fait celle du fibrome; elle est toutefois bien plus considérable que celle du polype muqueux. Cette tumeur diffère encore du polype muqueux par son absence de translucidité, par sa surface crevassée, striée, alors que le simple myxome est lisse. Enfin le polype muqueux macéré dans l'alcool subit une énorme réduction de volume, à cause de sa richesse en eau. Cette tumeur-ci a perdu un tiers seulement de ses dimensions.

Cette tumeur, pédiculée, était insérée à l'extrémité postérieure du cornet moyen dont un des fragments est resté dans son épais-

seur. En dehors et en dedans de cet os. la tumeur se continuait avec la muqueuse des fosses nasales.

J'ai eu affaire à ce que l'on pourrait nommer un fibrome mou, se confondant par certains de ses caractères avec le polype muqueux, par certains autres avec le fibrome vrai.

Moldenhauer dit, dans son excellent traité des maladies du nez : *On a déjà mentionné* que les polypes muqueux qui prennent leur point d'insection dans les parties postérieures des fosses (c'est le cas ici), avec tendance à se développer dans le nasopharynx, deviennent plus riches en tissu conjonctif, plus durs, et se rapprochent ainsi de la structure du fibrome vrai ([1]).

Morell Mackensie dit que ces tumeurs ne sont pas très fréquentes, et qu'il n'est pas sans danger de les opérer, à cause des hémorragies parfois très fortes auxquelles leur ablation donne lieu.

L'opération a eu lieu le 12 juillet 1887. Jusqu'ici (avril 1888) il n'y a pas eu de récidive ([2]).

### III

#### VÉGÉTATIONS ADÉNOÏDES.

Ces excroissances sont constituées par l'hypertrophie des follicules clos siégeant à la voûte du pharynx, immédiatement derrière la cloison.

Elles affectent deux formes différentes. Ou bien elles se réunissent en une masse formant l'amygdale rétropharyngienne de Luschka, ou bien elles se développent sous forme de petites tumeurs répandues sur toute la surface de la voûte pharyngienne jusque sur et contre les pavillons des trompes.

Le malade porteur de la première variété de végétations se plaint le plus souvent de ne pas pouvoir respirer par le nez. J'ai

---

([1]) MOLDENHAUER, *Die Krankheiten der Nasenhölen*. Leipzig, 1888, p. 149.

([2]) Au moment de la remise de mon manuscrit (janvier 1889), le nez de mon malade est toujours en bon état.

pu constater que les deux actes respiratoires ne s'opèrent pas toujours avec la même difficulté. En effet, la tumeur adénoïde est molle et subit des déplacements dans le sens antéro-postérieur; à l'inspiration, l'air pousse la tonsille en arrière; à l'expiration, le courant d'air refoule la tumeur contre l'ouverture postérieure des fosses nasales et les bouche hermétiquement. C'est là un signe de diagnostic qui ne manque pas de valeur.

La diminution de l'acuité auditive est un autre symptôme des végétations adénoïdes. Mais elle n'existe que pour autant que l'équilibre de tension entre l'air atmosphérique et celui de la caisse du tympan est rompu. Aussi pouvons-nous rencontrer une excellente ouïe chez un sujet possédant dans son pharynx nasal une volumineuse amygdale (c'était le cas chez le jeune homme auquel j'ai enlevé tout ce paquet), et nous trouvons souvent l'ouïe fort diminuée, ou bien des bourdonnements intenses, chez les personnes dont l'orifice tubaire est bouché par quelques follicules seulement.

Je vous prie de remarquer en passant que la surdité accompagnant les végétations adénoïdes est d'un pronostic variable. Si la surdité est due à la simple obstruction de l'orifice de la trompe, l'ablation des végétations sera suivie d'un brillant succès. Mais il n'en est pas toujours ainsi; très souvent un intense catarrhe de la trompe complique la présence des végétations adénoïdes; dans ce cas le succès, au point de vue de l'audition, ne sera pas immédiat; l'ouïe ne reviendra que lorsque, grâce à un traitement approprié, le catarrhe aura disparu.

La difficulté de la respiration nasale, la surdité plus ou moins complète, les ronflements énergiques de la nuit, sont les symptômes les plus fréquents. Le facies est assez caractéristique dans l'hypertrophie amygdaliforme : le malade a l'air hébété, les yeux largement ouverts, la bouche béante.

Comme il y a d'autres affections qui produisent les mêmes symptômes, je vous dirai quelques mots du diagnostic.

Les végétations non fasciculées se distinguent souvent à la rhinoscopie antérieure; à la rhinoscopie postérieure, l'on verra pendues à la voûte du pharynx de petites tumeurs grosses

comme un pois ou une petite fève, répandues sur toute la surface du naso-pharynx, ou accumulées au voisinage des trompes.

Les végétations fasciculées ou amygdaliformes prêtent mieux à confusion avec d'autres tumeurs. Lorsque les fosses nasales sont suffisamment larges, et la cocaïne les élargit toujours en dégorgeant la muqueuse, on voit le réflexe lumineux du fond de la gorge. Ceci est important : s'il n'y a pas de tumeur adénoïde, le mouvement d'inspiration ne fait pas bouger le point lumineux, qui monte et descend au contraire à la déglutition; s'il y en a une, le réflexe lumineux suit les mouvements respiratoires.

A la rhinoscopie postérieure, le pharynx nasal se montre rempli de fongosités.

Les polypes muqueux du nez sont situés plus avant; leur couleur est d'un gris transparent; le fibrome naso-pharyngien s'en distingue par son extrême dureté au toucher; l'hypertrophie de la muqueuse du cornet moyen, dans sa partie postérieure, présente avec les végétations adénoïdes une grande similitude d'aspect à la rhinoscopie antérieure. Seulement, à la rhinoscopie postérieure, le naso-pharynx est libre, la cloison est visible; les muqueuses hypertrophiées, semblables à desframboises, reposent jusque sur le voile du palais.

*Traitement.* — Le traitement est purement chirurgical. Les instruments inventés pour l'ablation des végétations adénoïdes sont très nombreux.

Le premier en date, celui de Mayer, de Copenhague, est constitué par un petit anneau d'acier coupant par l'un de ses bords.

L'opérateur introduit l'instrument par la fosse nasale, poussant l'anneau le long de la cloison jusqu'au-dessus du voile du palais. Un doigt introduit par la bouche présente au couteau les végétations à enlever.

Cet instrument a le désavantage de ne pouvoir être facilement introduit chez de jeunes sujets dont les fosses nasales ne sont pas très larges.

Viennent ensuite diverses curettes que l'on introduit par la


UNIVERSITY OF MICHIGAN





